

ÜBER ATTRAKTIONSGEBIETE SUPERATTRAKTIVER ZYKEL

Dissertation
zur Erlangung des Grades
eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

vorgelegt von
FRIEDRICH V. HAESLER
aus Bremen

Bremen,
im Oktober 1985

ÜBER
ATTRAKTIONSGEBIETE
SUPERATTRAKTIVER ZYKEL

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

vorgelegt von
Friedrich v. Haeseler
aus Bremen
Bremen, im Oktober 1985

" ... was für einen Zweck haben schließlich Bücher, in denen überhaupt keine Bilder und Unterhaltungen vorkommen?"

(Alice im Wunderland)

Die Dissertation lag den Promotionskommissionen Dr. -Ing./Dr. rer. nat.
der Politeknika Zürich vor, die den Promotionsantrag genehmigten.
Prof. Dr. H. O. Hartmann und Prof. Dr. H. F. Müller als Gutachter
eingesetzt. Die Verteidigung fand am 11. Oktober 1935 statt.

Inhalt

Zusammenfassung 1

Einleitung 2

Die Aufgabenstellung 10

Die Ergebnisse 20

Literaturverzeichnis 40

Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß Dr.-Ing./Dr.rer.nat. der Universität Bremen vor. An dem Promotionsverfahren haben Prof.Dr. H.-O.Peitgen und Prof.Dr. H.F. Münzner als Gutachter mitgewirkt. Das Kolloquium fand am 19.Oktober 1985 statt.

Inhalt

Einleitung.....	1
Grundlagen.....	5
Sofortige Attraktionsgebiete.....	10
Die Familie H _t	48
Literatur.....	63

0. Einleitung

In den Jahren 1918/19 wurde von den französischen Mathematikern P. Fatou und G. Julia die Theorie der Iteration rationaler Abbildungen entwickelt /13,16/. Heute spricht man auch von der Theorie der Juliamengen. Jedoch wurde bis auf eine Arbeit von C.L. Siegel /29/ aus dem Jahre 1942 und eine Arbeit von H. Brolin /2/, 1966, bis zum Jahre 1970 praktisch nichts auf diesem Gebiet veröffentlicht.

Das wachsende Interesse an zeitdiskreten dynamischen Systemen (Intervallabbildungen, Periodenverdopplung, strange attractors etc.) und die Entwicklung leistungsfähiger Computer und Computergraphic verhalfen der Theorie der Juliamengen zu neuer Beachtung.

Es war B.B. Mandelbrot, der im Jahre 1970 neben vielen Computerbildern von Juliamengen ein neues Objekt, die Mandelbrotmenge, vorstellte.

Angeregt durch diese Arbeit begannen A. Douady und J.H. Hubbard in mehreren Arbeiten /9,10,11/, die Mandelbrotmenge eingehender zu untersuchen und neue Fragestellungen zu entwickeln (mating, polynomial like mappings etc.). D. Sullivan, motiviert durch Douadys und Hubbards Veröffentlichungen, gelang es im Jahre 1983, eine bereits von Fatou gestellte Frage zu lösen. Sullivan zeigt in seinen Arbeiten /30/, daß eine rationale Abbildung

$R: \Sigma \rightarrow \Sigma$ keine wandernden Gebiete besitzt; damit ist jedes stabile Gebiet schließlich periodisch.

Weiterhin wird von Sullivan eine genaue Charakterisierung der periodischen stabilen Gebiete mitgeteilt, vgl./3,22, 30/ .

In dieser Arbeit betrachten wir den Typ des (super-) attraktiven Gebietes genauer. Nach einer äußerst kurzen und keineswegs vollständigen Einführung in die Theorie der Juliamengen im ersten Kapitel, beginnen wir im zweiten Kapitel mit der Untersuchung der Dynamik rationaler Abbildungen in sofortigen Attraktionsgebieten, die einfach zusammenhängend sind.

Es sei R eine rationale Abbildung mit einem (super-)attraktiven Fixpunkt α . Dann ist das sofortige Attraktionsgebiet $A^*(\alpha)$ entweder einfach oder unendlich oft zusammenhängend. Ist $A^*(\alpha)$ einfach zusammenhängend, so ist R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu einer Blaschke-Funktion $B_R: D \rightarrow D, D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$; das heißt: Es gibt eine konforme Abbildung $\phi: D \rightarrow A^*(\alpha)$ mit $R\phi = \phi B_R$.

Unsere erste Fragestellung beschäftigt sich mit der stetigen Fortsetzbarkeit von ϕ auf ∂D . Dabei handelt es sich um Verallgemeinerungen der von Douady und Hubbard für Polynome angestellten Untersuchungen /11/.

Ist ϕ auf ∂D stetig fortsetzbar, so ist die Dynamik von R auf $\partial A^*(\alpha)$ durch $w \rightarrow w^p, w \in S^1$, beschrieben.

Neben diesen, im Rahmen der Theorie mehr oder weniger offensichtlichen Ergebnissen enthält das zweite Kapitel zwei

Theoreme, die bei der Untersuchung von Juliamengen rationaler Abbildungen von unmittelbarem Nutzen sind. Dies wird im dritten Kapitel besonders deutlich.

Das erste Theorem gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, daß $\partial A^*(\alpha)$ eine Jordankurve ist. Obwohl die Voraussetzungen dieses Theorems sehr speziell sind, erscheint es plausibel, daß weitere Verallgemeinerungen möglich sind.

Das zweite Theorem im letzten Teil des zweiten Kapitels behandelt die Frage, wann R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu

$B(w)=w^p$ ist.

Wir geben ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an, das im wesentlichen auf der kürzlich von deBranges bewiesenen Bieberbach-Vermutung /4,24/ beruht und es erlaubt, allein an der Potenzreihenentwicklung einer rationalen Abbildung R in einem Fixpunkt α festzustellen, ob R auf $A^*(\alpha)$ zu obiger Blaschke-Funktion konjugiert ist. Aus den Koeffizienten der Potenzreihe von R lassen sich nämlich die Koeffizienten c_n , der lokalen Konjugationsabbildung $\phi(w)=w+c_2w^2+\dots$ errechnen. Gilt nun $|c_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu $B(w)=w^p$ und umgekehrt.

Im dritten Kapitel diskutieren wir die Eigenschaften der Juliamengen der Familie

$$H_t(z) = \frac{z^2+t}{z^2-1}, \quad t \in \mathbb{C} - \{-1\}.$$

Diese Familie ist eng verwandt mit einer Familie rationaler Abbildungen vom Grad vier und kann physikalisch als eine Re-

normierungstransformation eines hierarchischen Potts-Modells interpretiert werden /21,22,23/.

Gleichzeitig stellt die Familie H_t einen Modellfall für die Anwendung der in Kapitel zwei gewonnenen Resultate dar, die zum Teil durch das Studium der Familie H_t motiviert worden sind.

1. Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen bereitstellen.

$\mathbb{E} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichne stets die Riemannsche Sphäre.

$R: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ist eine analytische Abbildung, also eine rationale Funktion $R(z) = p(z)/q(z)$, wobei p und q teilerfremde Polynome mit komplexen Koeffizienten sind. Der Grad von R , $d = \deg(R)$, ist $d = \max(\deg(p), \deg(q))$. Wir wollen stets $d > 1$ annehmen.

Mit R^n bezeichnen wir die n -te Iterierte von R , und wir verabreden $R^0(z) \equiv z$.

1.1. Definition

$x \in \mathbb{E}$ heißt periodischer Punkt von R , wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $R^n(x) = x$ ist.

Das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft heißt die Periode von x . Wir sagen: x ist ein Fixpunkt der Periode n .

Bemerkungen

- Ist x ein Fixpunkt der Periode 1, so nennen wir x einfach Fixpunkt.
- Ist x ein Fixpunkt der Periode n , so sind die Punkte $R^j(x)$, $j=0,1,\dots,n-1$, ebenfalls Fixpunkte der Periode n . Die Menge $\{x, R(x), R^2(x), \dots, R^{n-1}(x)\}$ nennen wir den Zykel von x .

1.2. Definition

Es sei x ein Fixpunkt der Periode n von R . Dann heißt $\mu = (R^n)'(x)$ der Eigenwert des Zyklus von x . Wir nennen den Zykel von x attraktiv (repulsiv), wenn $0 < |\mu| < 1$ ($|\mu| > 1$) gilt.

Ist $\mu = 0$, so nennen wir den Zykel superattraktiv.

Ist $|\mu| = 1$, so heißt der Zykel rational (irrational) indifferent, wenn μ eine (keine) Einheitswurzel ist.

Wir geben nun die Definition der Juliamenge einer rationalen Funktion.

1.3. Definition

Die Juliamenge J einer rationalen Funktion R besteht aus den Punkten $z \in \Sigma$, in denen die Folge der Iterierten $\{R^n(z)\}$ nicht normal ist.

Für eine genauere Diskussion des Begriffes der normalen Familie sei auf /1,15/ verwiesen.

Wichtig für die Theorie der Juliamengen ist

1.4. Theorem

Die Juliamenge einer rationalen Funktion vom Grad größer als 1 ist nicht leer.

Beweise findet man in /2,3,13,16/.

In den Arbeiten /2,3/ sind die elementaren Eigenschaften von Juliamengen bewiesen.

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir einige dieser Ergebnisse

immer mal wieder kommentarlos benutzen.

Wie die Arbeiten von Sullivan /30/ gezeigt haben, ist die Rolle der kritischen Punkte einer rationalen Abbildung von fundamentaler Bedeutung. Auch die in /8,17,21,22/ durchgeführten Computerexperimente wären ohne die Besonderheit der kritischen Punkte nicht möglich.

Auch bei unseren Überlegungen werden die kritischen Punkte nicht unbedeutend sein.

Hierzu benötigen wir einige Definitionen.

1.5. Definition

$v \in E$ ist ein kritischer Wert von R , wenn die Gleichung $R(z) = v$ eine Lösung $c \in E$ mit Vielfachheit größer als eins besitzt. Diese Lösung heißt kritischer Punkt von R .

Die Menge der kritischen Punkte von R wird mit C bezeichnet. Mit $\bar{C}$ notieren wir die abgeschlossene Hülle der Menge $\{R^n(c) \mid c \in C, n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkungen

- In /2/ wird statt von kritischen Punkten von R von kritischen Punkten von R^{-1} gesprochen. In unserer Sprechweise sind die kritischen Punkte von R^{-1} gerade die kritischen Werte von R .
- Vom topologischen Gesichtspunkt sind die kritischen Punkte von R die Punkte, in denen R nicht lokal injektiv ist. Sie sind somit die Verzweigungspunkte der Überlagerung $R: E \rightarrow E$.

Wir kommen nun zum Begriff des Attraktionsgebiets.

1.6. Definition

Es sei $\{x, R(x), \dots, R^{n-1}(x)\}$ ein (super-)attraktiver Zykel von R . Dann heißt die Menge

$A(\{x, \dots, R^{n-1}(x)\}) = \{z \in \Sigma \mid \{x, \dots, R^{n-1}(x)\} \subset \overline{\{R^k(z) \mid k \in \mathbb{N}\}}\}$
das Attraktionsgebiet des Zyklus.

Die Vereinigung der Zusammenhangskomponenten von $A(\{x, \dots, R^{n-1}(x)\})$, die $x, \dots, R^{n-1}(x)$ enthalten, heißt sofortiges Attraktionsgebiet des Zyklus; abgekürzt $A^*(\{x, \dots, R^{n-1}(x)\})$.

Die oben erwähnte Rolle der kritischen Punkte soll am folgenden Theorem illustriert werden.

1.7. Theorem

Ist $\{x, \dots, R^{n-1}(x)\}$ ein (super-)attraktiver Zykel von R , so gibt es mindestens ein $c \in C$ mit $c \in A^*(\{x, \dots, R^{n-1}(x)\})$.

Der Beweis ist in /2,3/ zu finden.

Bemerkungen

- Ist R vom Grad d , so besitzt R maximal $2d-2$ kritische Punkte /2,3/. R hat also höchstens $2d-2$ (super-)attraktive Zyklen.
- Ist $\{x, \dots, R^{n-1}(x)\}$ ein superattraktiver Zykel von R , so ist mindestens ein Element des Zyklus ein kritischer Punkt von R .

Hiermit wollen wir die kurze Darstellung der Grundlagen be-
schließen. Nochmals sei auf die ausführlichen Arbeiten von
Brolin /2/ und Blanchard /3/ hingewiesen. Auch die Lektüre der
Arbeiten von Fatou /13/ und Julia /16/ ist zu empfehlen.
Im nächsten Kapitel werden wir sofortige Attraktionsgebiete
von (super-)attraktiven Fixpunkten genauer studieren.

2. Sofortige Attraktionsgebiete

In diesem Teil der Arbeit wollen wir sofortige Attraktionsgebiete von Fixpunkten untersuchen. Wir beginnen mit einigen klassischen Resultaten, die bereits Julia /16/ und Fatou /13/ bekannt waren. Die Ergebnisse beziehen sich zum einen auf die topologische Form von sofortigen Attraktionsgebieten und zum anderen auf Aussagen über die gesamte Juliamenge, die aus bestimmten Eigenschaften sofortiger Attraktionsgebiete folgen.

Anschließend zeigen wir, wie wir mit Hilfe von lokalen und globalen Konjugationen sofortige Attraktionsgebiete genauer untersuchen können.

So machen Douady und Hubbard in ihren Arbeiten über die Mandelbrotmenge /9,10,11/ ausgiebig Gebrauch von globalen Konjugationen.

Im folgenden sei R eine rationale Abbildung mit einem (super-) attraktiven Fixpunkt α .

2.1. Theorem

$A^*(\alpha)$ ist entweder einfach zusammenhängend oder unendlich oft zusammenhängend.

Beweis (/3/)

Es gibt eine einfach zusammenhängende Umgebung U von α mit

- a) $U \subset A^*(\alpha)$,
- b) $R(U) \subset U$,
- c) $\partial U \cap \{R^n(c) \mid c \in C, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

Wir definieren die Mengen E_k induktiv durch:

$$E_0 = U \text{ und } E_k = R^{-1}(E_{k-1}) \cap A^*(\alpha) .$$

Damit gilt:

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \text{ und } A^*(\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k .$$

Ist $A^*(\alpha)$ nicht einfach zusammenhängend, so existiert ein m , sodaß E_m nicht einfach zusammenhängend ist. Also besteht ∂E_m aus mindestens zwei Komponenten und wegen c) ist $R: E_{m+k} \rightarrow E_{m+k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Überlagerung. Die Anzahl der Randkurven von E_{m+k} ist mindestens 2^k . Also hat $\partial A^*(\alpha)$ unendlich viele Komponenten, und $A^*(\alpha)$ ist unendlich oft zusammenhängend.

qed.

Bemerkung

- Ist $p: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ein Polynom vom Grad d , so ist ∞ ein superattraktiver Fixpunkt. Es gilt:

$A^*(\infty) = A(\infty)$, und liegt ein endlicher kritischer Punkt von p in $A(\infty)$, so ist $A(\infty)$ unendlich oft zusammenhängend.

2.2. Theorem

Ist $\bar{C} \subset A^*(\alpha)$, so ist J völlig unzusammenhängend.

Der Beweis ist in /2/ zu finden.

Als Konsequenz erhalten wir, daß $A^*(\alpha) = A(\alpha)$ unendlich hohen Zusammenhang hat.

Das Theorem 2.2. ist ein Beispiel dafür, wie wir mit Hilfe der kritischen Punkte und deren Lage in einem sofortigen Attraktionsgebiet Aussagen über die Juliamenge J von R machen können.

Ein weiteres Beispiel ist:

2.3. Theorem

Es seien α und β attraktive Fixpunkte von R .

Gilt $A^*(\alpha)=A(\alpha)$ und $A^*(\beta)=A(\beta)$, dann ist J eine Jordankurve.

Auch dieser Beweis ist in /2/.

Beispiel

Es sei $p_\mu(z)=\mu z+z^2$. Dann ist J_μ von p_μ für alle μ mit $|\mu|<1$ eine Jordankurve.

Wir kommen nun zu den Begriffen der lokalen und globalen Konjugation. Globale Konjugationen erlauben ein genaues Studium der Dynamik einer rationalen Abbildung in einem sofortigen Attraktionsgebiet eines Fixpunktes von R und - unter gewissen Voraussetzungen - auch das Studium der Dynamik von R auf dem Rand dieses Gebietes.

Lokale Konjugationen gestatten dagegen nur eine genaue Beschreibung der Dynamik von R in der Nähe von Fixpunkten.

Wir verabreden noch, eine analytische Abbildung $\phi:U \rightarrow \mathbb{C}$, U offen, die injektiv ist, konform zu nennen.

2.4. Theorem

Es sei $A^*(\alpha)$ einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine konforme Abbildung $\phi:D=\{w \in \mathbb{C} \mid |w|<1\} \rightarrow A^*(\alpha)$ mit $\phi(0)=\alpha$, sodaß die Abbildung $\phi^{-1}R\phi:D \rightarrow D$ eine Blaschke-Funktion $B_R(w)$

der Form

$$B_R(w) = w^p \prod_{j=1}^q \frac{w_j + w}{1 + \overline{w_j} w}$$

mit $p \geq 1$, $2 \leq p+q$ und $|w_j| < 1$, $j=1, \dots, q$, ist.

Beweis /31/

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine konforme Abbildung $\tilde{\phi}: A^*(\alpha) \rightarrow D$ mit $\tilde{\phi}(0) = \alpha$. Die Abbildung $B(u) = \tilde{\phi} R \tilde{\phi}^{-1}(u)$ bildet D auf D ab. Da der Grad von B endlich ist, ist B eine Blaschke-Funktion der Form

$$B_R(u) = A u^p \prod_{j=1}^q \frac{u_j + u}{1 + \overline{u_j} u}$$

mit $|A|=1$ und $|u_j| < 1$, $j=1, \dots, q$, $p \geq 1$, $p+q \geq 2$.

Durch einen zusätzlichen Koordinatenwechsel

$$w = u A^{-1/p+q-1}$$

erhalten wir die gewünschte Form für B_R .

ged.

Bemerkungen

- Ist $A^*(\alpha)$ einfach zusammenhängend, so haben wir mit obigem Theorem eine Beschreibung der Dynamik von R auf $A^*(\alpha)$ gewonnen.
- Erfüllt R die Voraussetzungen des Theorems 2.4., so sagen wir: R ist auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu B_R .

Bevor wir die Theorie der globalen Konjugationen weiterentwickeln, stellen wir in einem zusammenfassenden Theorem Aussagen über lokale Konjugationen zusammen.

Die Liste der Arbeiten zu diesem Thema ist lang. Erwähnt seien nur /5,6,7,26,27,29/.

2.5. Theorem

Es sei α ein Fixpunkt von R mit Eigenwert μ .

Dann gilt:

- 1) Ist $\mu \neq 0$ und $|\mu| \neq 1$, so gibt es Umgebungen U von 0 und V von α und eine konforme Abbildung $\phi: U \rightarrow V$, sodaß

$$\phi^{-1} R \phi(w) = \mu w$$
gilt.
- 2) Ist $\mu = 0$ und $R^{(k)}(\alpha) \neq 0$ und $R^{(j)}(\alpha) = 0$ für $j = 1, \dots, k-1$,
so gibt es eine konforme Abbildung $\phi: U \rightarrow V$ (U, V wie oben)
mit

$$\phi^{-1} R \phi(w) = w^k.$$
- 3) Ist $\mu = e^{2\pi i \tau}$ und gibt es $\sigma > 0$ und $\tau > 0$, sodaß für alle
 $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $|t - m/n| > \sigma/n^\tau$ gilt, so gibt es eine konforme
Abbildung $\phi: U \rightarrow V$, sodaß

$$\phi^{-1} R \phi(w) = \mu w$$
gilt.
- 4) Ist $\mu = e^{2\pi i \tau}$ und $\mu^n = 1$ und $\mu^j \neq 1$ für $j = 1, \dots, n-1$, so ist
entweder $R^n(z) \equiv z$ oder es gibt einen Homöomorphismus (!)
 $h: U \rightarrow V$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$h^{-1} R h(w) = \mu w (1 + w^{kn}).$$

Bemerkungen

- 1) geht auf eine Fragestellung von Schröder /27/ zurück.
Ein Beweis wird in /3/ gegeben.
- 2) ist ein Ergebnis von Boettcher /5/. Auch in /3,25/

sind Beweise für diese Aussage geführt.

- 3) ist unter dem Namen Zentrumsproblem bekannt geworden. Auch dieses Problem geht auf Schröder zurück /27/. Besonders Cremer /7/ hat sich eingehend hiermit beschäftigt. Er gibt jedoch nur Bedingungen an t an, unter denen keine lokalen Konjugationen existieren. Erst Siegel /29/ gelang es, eine positive Antwort zu finden. Die zahlentheoretische Bedingung an t stammt von ihm. Rüssmann verschärfte Siegels Resultat 30 Jahre später /26/.
- Das bemerkenswerte am Punkt 4) ist, daß nur ein Homöomorphismus, der R lokal zu einer einfachen Abbildung konjugiert, existiert. Dies liegt an der Eigenschaft rational indifferenter Fixpunkte Element der Julia-Menge zu sein. Ein Beweis von 4) ist in /6/ zu lesen.
- Die Potenzreihenentwicklung der in den Punkten 1), 2) und 3) erwähnten konformen Abbildung läßt sich durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen. Problematisch, besonders bei 3), ist, die Konvergenz der so erhaltenen Potenzreihen zu beweisen.

Nach diesem Exkurs über lokale Konjugationen, wenden wir uns erneut den globalen Konjugationen zu.

Sind die Voraussetzungen des Theorems 2.4. erfüllt, so haben wir eine Beschreibung der Dynamik von R durch B_R erhalten.

Die Frage ist nun:

Wie kann die Dynamik von R auf $\partial A^*(\alpha)$ beschrieben werden?

Gelänge es, die konforme Abbildung ϕ wenigstens stetig auf

∂D fortzusetzen, so wäre unsere Frage gelöst.

Das Problem der stetigen Fortsetzung konformer Abbildungen wurde bereits von Carathéodory bearbeitet.

2.6. Theorem (Carathéodory)

Es sei $\phi: D \rightarrow \Sigma$ konform. ϕ besitzt genau dann eine stetige Fortsetzung auf ∂D , wenn $\partial \phi(D)$ lokal zusammenhängt.

Ein Beweis ist in /23/ geführt.

Wir benötigen somit ein Kriterium für den lokalen Zusammenhang von $\partial A^*(\alpha)$. Dies leistet

2.7. Satz

Es sei $A^*(\alpha)$ einfach zusammenhängend. Gibt es ein $\delta > 1$ und ein $h \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq h$ und für alle $z \in \partial A^*(\alpha)$

$$|(R^n)'(z)| \geq \delta$$

gilt, so ist $\partial A^*(\alpha)$ lokal zusammenhängend.

Beweis

Ohne Einschränkung nehmen wir $h=1$ an, andernfalls betrachten wir R^h .

Die Beweisidee ist: Konstruktion einer Folge von Jordankurven $\sigma_n: S^1 \rightarrow A^*(\alpha)$, die gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $\Gamma: S^1 \rightarrow \Sigma$ mit $\{\Gamma(t) | t \in S^1\} = \partial A^*(\alpha)$ konvergieren.

Als stetiges Bild einer lokal zusammenhängenden Menge ist $\partial A^*(\alpha)$ ebenfalls lokal zusammenhängend /23/. Zur Vereinfachung führen wir ein:

Ist $\sigma: S^1 \rightarrow A^*(\alpha)$ eine Jordankurve, so ist $z \in A^*(\alpha)$ im Inneren von σ , wenn $\phi^{-1}(z)$ in der beschränkten Zusammenhangskomponente von $\Sigma - \phi^{-1}(\sigma)$ liegt; dabei ist ϕ die konforme

Abbildung des Theorems 2.4. .

Wir beginnen mit der Konstruktion der Folge (σ_n) .

Es gibt ein $\tau > 0$, sodaß für alle $z \in A^*(\alpha)$ mit $d(z, \partial A^*(\alpha)) < \tau$

$$(1) \quad |R'(z)| \geq (\delta + 1)/2 = \delta'$$

gilt.

Es sei $\sigma_0: S^1 \rightarrow A^*(\alpha)$ eine analytische Jordankurve, deren Inneres α und alle kritischen Punkte von R in $A^*(\alpha)$ enthält und deren Abstand zu $\partial A^*(\alpha)$ kleiner als τ ist.

Dann sind

$$\sigma_n = R^{-n}(\sigma_0) \cap A^*(\alpha)$$

ebenfalls analytische Jordankurven. Aus (1) folgt

$$d(\sigma_n(t), A^*(\alpha)) \leq \tau / (\delta')^n \quad \text{für alle } t \in S^1.$$

Desweiteren liegt σ_n im Inneren von σ_{n+1} . Wir geben nun eine Parametrisierung der Jordankurven σ_n an.

Die Jordankurven σ_0 und σ_1 begrenzen das Gebiet G_{01} , das konform äquivalent zu einem Kreisring $K_b = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < b\}$ ist.

Das heißt: Es gibt eine konforme Abbildung $\theta: K_b \rightarrow G_{01}$.

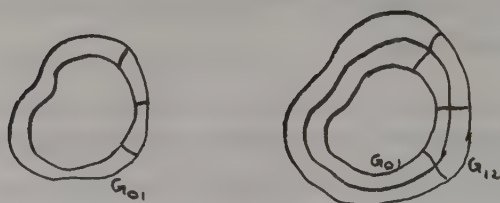
Es sei nun $r_t = \{w \mid w = se^{2\pi i t}, s \in (1, b), t \in (0, 1)\}$.

Dann ist $\theta(r_t)$ eine Trajektorie von einem Punkt auf σ_0 zu einem Punkt auf σ_1 , die senkrecht auf σ_0 und σ_1 steht.

Variieren wir t , so erhalten wir eine Überdeckung von G_{01} durch Trajektorien $\theta(r_t)$.

Durch sukzessives Anwenden von R^{-1} erhalten wir eine Überdeckung der Gebiete $G_{12}, G_{23}, \dots$.

Die folgende Skizze soll unser weiteres Vorgehen erläutern.



Jeder Punkt von σ_n liegt auf genau einer Trajektorie, die durch die Vereinigung der Trajektorien in den Gebieten $G_{i,i+1}$ entstanden ist. Da $\theta: S^1 \rightarrow A^*(\alpha)$ eine Parametrisierung von σ_0 ist, liegt jeder Punkt $z \in \sigma_n$ auf genau einer Trajektorie, die in einem Punkt $\theta(t), t \in S^1$, beginnt. Wir setzen $t \rightarrow z_t = z$. Dadurch haben wir eine stetige Parametrisierung von σ_n definiert, $\sigma_n: S^1 \rightarrow A^*(\alpha)$. Ist l_n die maximale Länge der Trajektorien zwischen σ_n und σ_{n+1} , so folgt aus (1)

$$l_{n+1} \leq l_n / \delta'.$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge (σ_n) . Der Grenzwert $\Gamma: S^1 \rightarrow \partial A^*(\alpha)$ ist dann ebenfalls eine stetige Abbildung. Damit ist $\partial A^*(\alpha)$ lokal zusammenhängend.

qed.

Bemerkungen

- Die Beweisidee für den Satz 2.7. ist aus [2].
- Die Grenzkurve Γ ist nicht notwendig eine Jordankurve.
- Die Voraussetzung an R' auf $\partial A^*(\alpha)$ ist in der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme unter dem Begriff expansiv oder

hyperbolisch wiederzuentdecken; vgl./11,28,30/.

Kurz gesagt ist R hyperbolisch auf $\partial A^*(\alpha)$.

Somit haben wir

2.8. Korollar

Ist $A^*(\alpha)$ einfach zusammenhängend und ist R hyperbolisch auf $\partial A^*(\alpha)$, so besitzt die konforme Abbildung $\phi: D \rightarrow A^*(\alpha)$ eine stetige Fortsetzung auf ∂D .

Ist R hyperbolisch auf $\partial A^*(\alpha)$, so können wir also eine Beschreibung der Dynamik von R auf $\partial A^*(\alpha)$ geben. Dies werden wir weiter unten genauer durchführen. Zunächst geben wir ein Kriterium an, wann R hyperbolisch auf $\partial A^*(\alpha)$ ist.

2.9. Satz

Ist $\overline{C} \cap A^*(\alpha) = \emptyset$, so ist R hyperbolisch auf $\partial A^*(\alpha)$.

Beweis

Da $A^*(\alpha)$ kompakt ist, ist $d(\overline{C}, \partial A^*(\alpha)) = \tau > 0$.

Wir überdecken $A^*(\alpha)$ mit endlich vielen Kreisscheiben

$$D_k = D_x(z_k) = \{z \in \Sigma \mid |z - z_k| < r\}, \quad z_k \in A^*(\alpha), \quad r < \tau, \quad k=1, \dots, m.$$

Mit R_j^{-n} bezeichnen wir die verschiedenen Zweige der Umkehrfunktionen von R . Dann ist die Familie

$$\{R_j^{-n}(z) \mid R_j^{-n}(A^*(\alpha)) \cap \partial A^*(\alpha) \neq \emptyset\}$$
 normal in D_k und hat nur

konstante Grenzfunktionen /2/. Daraus folgt, daß die

Funktionen $\{(R_j^{-n})'(z)\}$ in $\bigcup D_k$ gleichmäßig gegen Null

konvergieren. Somit gibt es ein $h \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 1$, sodaß

für alle $n \geq h$ und alle $z \in \bigcup D_k$

$$|(R_j^{-n})'(z)| \leq \delta^{-1} \text{ gilt.}$$

Also $|(R^n)'(z)| \geq \delta$ für alle $z \in \partial A^*(\alpha)$ und $n \geq h$. qed.

Bemerkung

- In [11] wird für Polynome p folgende Aussage bewiesen.
 p ist genau dann hyperbolisch auf $\partial A^*(\infty) = J$, wenn jeder endliche kritische Punkt gegen einen attraktiven Zykel strebt.

Wir kommen nun zu der Beschreibung der Dynamik von R auf $\partial A^*(\alpha)$. Dazu benötigen wir eine Beschreibung der Dynamik von Blaschke-Funktionen auf ihrer Juliamenge. Überraschenderweise gibt es in diesem Fall eine sehr gute Beschreibung.

2.10. Lemma

Es sei $B_w: \Sigma \rightarrow \Sigma$ eine Blaschke-Funktion der Form

$$B_U(w) = w \prod_{j=1}^{\alpha} \frac{w_j + w}{1 + \overline{w_j} w} \quad \text{mit } U = (w_1, w_2, \dots, w_{\alpha}) \in D^{\alpha}.$$

Die Juliamenge von B_U ist S^1 , und für alle $U \in D^{\alpha}$ gibt es einen Homöomorphismus $h_U: S^1 \rightarrow S^1$, sodaß $B_U(h_U(w)) = h_U(B_U(w))$ für alle $w \in S^1$ gilt. Dabei ist $B_U(w) = w^{\alpha+1}$.

Beweis

Die Mengen D, S^1 und $\Delta = \{z \in \Sigma \mid |z| > 1\}$ sind vollständig invariant unter B_U und 0 und ∞ sind attraktive Fixpunkte mit $A^*(0) = A(0) = D$ und $A^*(\infty) = A(\infty) = \Delta$. Damit ist S^1 die Juliamenge von B_U .

Wir zeigen, daß S^1 keine kritischen Punkte von B_U enthält.

Annahme: $c \in S^1$ sei ein kritischer Punkt von B_U . Dann gibt

es ein $k \geq 2$, sodaß für $l=1, \dots, k-1$ $B_U^{(l)}(c)=0$ und $B_U^{(k)}(c) \neq 0$ gilt. Durch eine Möbiustransformation $m: \Sigma \rightarrow \Sigma$ mit $m(0)=i$, $m(\infty)=-i$ und $m(c)=0$ erhalten wir für

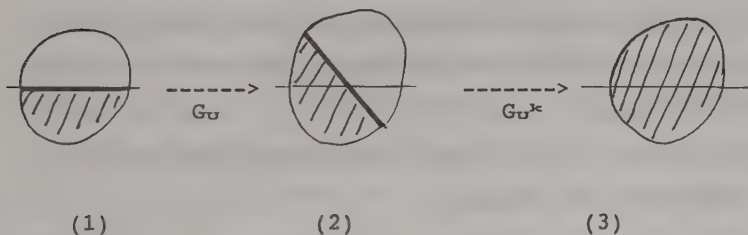
$$H_U(z) = m B_U m^{-1}(z) :$$

$$A^*(i) = A(i) = \{z \in \Sigma \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

$A^*(-i) = A(-i) = \{z \in \Sigma \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$ und als Juliamenge von H_U $R \setminus \{0\}$. Auf einer δ -Umgebung der Null hat H_U diese Gestalt $H_U(z) = H_U(0) + [G_U(z)]^k$; dabei ist G_U holomorph und $G_U(0)=0$, $G_U'(0) \neq 0$. Weiter gilt: $[G_U(z)]^k \in R$ genau dann, wenn $z \in -\delta, \delta($.

Damit haben wir für $r \in -\delta, \delta($

$G_U(r) = g(r)w$, wobei $g:]-\delta, \delta[\rightarrow R$, $g(0)=0$ und w eine k -te Einheitswurzel ist. Dadurch erhalten wir lokal folgendes Bild



Beim Schritt von (2) nach (3) ging $k \geq 2$ wesentlich ein. Also ist $A(i)$ nicht invariant unter H_U . Wir haben einen Widerspruch erhalten.

Der Polydisk D^{α} ist eine einfach zusammenhängende Umgebung des Punktes $(0, \dots, 0)$ und für alle $U \in D^{\alpha}$ ist B_U hyperbolisch auf S^1 . Damit existiert für jedes $U \in D^{\alpha}$ ein $h_U: S^1 \rightarrow S^1$ mit der gewünschten Eigenschaft /18, Theorem B/.
ged.

Ist $\partial A^*(\alpha)$ lokal zusammenhängend, so haben wir

2.11. Satz

Ist R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu der Blaschke-Funktion B_R und ist $\partial A^*(\alpha)$ lokal zusammenhängend, so gilt:

Es gibt eine stetige Abbildung $g: S^1 \rightarrow \partial A^*(\alpha)$, sodaß für ein $k \in \mathbb{N}$ und alle $w \in S^1$

$R(g(w)) = g(w^k)$ gilt.

Beweis

Nach dem Theorem 2.4. gibt es eine konforme Abbildung $\phi: D \rightarrow A^*(\alpha)$ und eine Blaschke-Funktion

$$B_R(w) = w^p \prod_{j=1}^q \frac{w_j + w}{1 + \overline{w_j} w},$$

sodaß

$$R(\phi(w)) = \phi(B_R(w))$$

auch für die stetige Fortsetzung von ϕ auf S^1 gilt. Aus dem Lemma 2.10. folgt die Existenz eines Homeomorphismus $h: S^1 \rightarrow S^1$, sodaß

$h(w^{p+q}) = B_R(h(w))$ auf S^1 gilt. Setzen wir $k = q + p$ und $g = \phi h$, so haben wir alles gezeigt.

qed.

Für lokal zusammenhängend Ränder sofortiger Attraktionsgebiete gelingt es somit, eine gute Beschreibung der Dynamik von R zu geben. Ist p ein Polynom vom Grad d mit zusammenhängender und lokal zusammenhängender Julia-menge J , so ist $p|_J$ stets durch $w \rightarrow w^d$ beschrieben.

Ist $\partial A^*(\alpha)$ nicht lokal zusammenhängend, so ist die Situation wesentlich schwieriger.

Für gewisse Blaschke-Funktionen lassen sich zumindestens partielle Resultate angeben. Man vergleiche auch die in /11/ für Polynome angeführten Ergebnisse.

2.12. Satz

Es sei R auf $A^*(\alpha)$ via ϕ zu $B_R(w)=w^2$ konjugiert. Dann existiert

$$\lim_{r \rightarrow 1} \phi(re^{2\pi i t}) \quad , r \in (0,1(, \\ \text{für alle } t \in \mathbb{Q}.$$

Beweis

Ohne Einschränkung können wir $t \in (0,1($ annehmen. Wir beginnen mit $t=0$.

Es sei $G=A^*(\alpha)-\phi[-1,0]$ und $R_+:G \rightarrow G$ der Zweig der Umkehrfunktion von R mit $R_+(\phi(r))=\phi(\sqrt{r})$ für alle $r \in (0,1($. Dann ist die Familie der Iterierten von $R_+, \{R_+^n\}$, auf G normal und hat nur konstante Grenzfunktionen /2, Theorem 6.2/.

Wir beweisen nun, daß der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_+^n(z) \text{ unabhängig von } z \in G \text{ existiert.}$$

Ist $(R_+^{n(j)})$ eine konvergente Teilfolge von (R_+^n) und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} R_+^{n(j)}(z) = a \quad , \text{ so gilt}$$

$$R(R_+^{n(j)}(\phi(r))) = R_+^{n(j)}(R(\phi(r))) = R_+^{n(j)}(\phi(r^2)) \quad \text{für alle } r \in (0,1(.$$

Daraus folgt, daß alle konstanten Grenzfunktionen Fixpunkte von R sind.

$C_{rad}(\phi,1)$ sei die Menge der Häufungspunkte von $\phi(r)$, wenn r gegen 1 strebt, $r \in (0,1($. $C_{rad}(\phi,1)$ ist kompakt und zusammenhängend /23, S.276/. Wir zeigen, daß jedes Element von $C_{rad}(\phi,1)$ Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $\{R_+^n\}$

ist. Dazu setzen wir

$$K_0 = \phi(I_0) \quad , \quad I_0 = (2^{-1}, 2^{-1/2})$$

und

$$K_j = R^j(K_0) = \phi(I_j) \quad , \quad I_j = (2^{-1/2^j}, 2^{-1/2^{j+1}}).$$

Damit ist

$$\phi((2^{-1}, 1)) = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j.$$

Es sei nun $(z_j) \subset (2^{-1}, 1)$ eine gegen 1 konvergente Folge, sodaß $(\phi(z_j))$ gegen ein $a \in C_{\mathbb{R}^d}(\phi, 1)$ konvergiert. Dann können wir ohne Einschränkung annehmen, daß es zu jedem j ein $n(j)$ so gibt, daß

$$z_j \in I_{n(j)}, \text{ und } n(j+1) > n(j) \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Dann ist durch die Folge $(n(j))$ eine Teilfolge $(R^{n(j)})$ definiert, die die Eigenschaften

$$R^{n(j)}(K_0) = K_{n(j)} = \phi(I_{n(j)})$$

und für alle $\delta > 0$ gibt es ein j_0 , sodaß für alle $j \geq j_0$

$$R^{n(j)}(K_0) \cap D_\delta(a) \neq \emptyset \text{ gilt, besitzt.}$$

Damit hat jede konvergente Teilfolge von $(R^{n(j)})$ a als Häufungspunkt. Aus der Konstanz der Grenzfunktionen folgt die Konvergenz von $(R^{n(j)})$ gegen a . Weiter ist a ein Fixpunkt von R . Also besteht $C_{\mathbb{R}^d}(\phi, 1)$ nur aus einem Punkt.

Damit existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = a \quad /23, S.277/.$$

Durch Rückwärtsiteration erhalten wir die Existenz aller radialen Grenzwerte $\phi(e^{2\pi i t})$ mit $t = p/2^k$, p ungerade, $k \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $t = p/q$, p, q teilerfremd und q ungerade. Dann ist $w_t = e^{2\pi i t}$ ein periodischer Punkt der Periode $k \geq 2$ von $B_R(w) = w^2$.

Auf $D' = D - (0, 1[$ definieren wir die Umkehrfunktionen von B_R durch

$$b_\tau(w_s = re^{2\pi i s}) = \tau \sqrt{re^{\pi i s}} = \tau \sqrt{w_s}, \quad s \in (0, 1[, r \in (0, 1[\text{ und } \tau \in \{-1, 1\}.$$

Dann gilt:

Zu w_t gibt es eine endliche Folge $(\tau_j), j=1, \dots, k, \tau_j \in \{-1, 1\}$,
sodaß für $w_{t,j} = w_t^{2^{-j}}$ und für $j=1, \dots, k$

$$w_{t,j-1} = \tau_j \sqrt{w_{t,j}} \text{ gilt.}$$

Also mit $b_j = b_{\tau_j}$

$$b_1 b_2 \dots b_k (r w_t) = r^{1/2} b_1 b_2 \dots b_k (w) = r^{1/2} w_t \text{ für } r \in (0, 1[.$$

Damit haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 \dots b_k)^n(z) = w_t \text{ für alle } z \in D'.$$

Dann ist durch

$$R_1, \dots, R_k(z) = b_1 \dots b_k(\phi^{-1}(z))$$

ein Zweig der Umkehrfunktion von R^k auf $A^*(\alpha) - \phi((0, 1[) = G$ definiert, und es gilt

$$R^k(R_1, \dots, R_k(z)) = z,$$

sowie für $z = \phi(r w_t), r \in (0, 1[$,

$$R_1, \dots, R_k(R^k(z)) = R_1, \dots, R_k(\phi(r^2 w_t)) = \phi(r w_t) = z.$$

Wie im Falle $t=0$ erhalten wir:

Die Familie $\{(R_1, \dots, R_k)^n\}$ ist normal und hat nur konstante Grenzfunktionen, diese sind Fixpunkte von R^k . Die Menge $C_{rad}(\phi, w_t)$, die analog zu $C_{rad}(\phi, 1)$ definiert ist, besteht nur aus einem Punkt.

Daraus folgt die Existenz des radialen Grenzwerts.

qed.

Bemerkungen

- Ist $w_t = e^{2\pi i t}$, $t = p/q$, p, q teilerfremd, q ungerade, so ist w_t ein Fixpunkt der Periode k von $B(w) = w^2$. Für die Periode k gilt:

$$k = \min \{n \in \mathbb{N} \mid q \text{ teilt } 2^n - 1\}.$$

Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß

$$t = p/q = mp/(2^k - 1) \text{ gilt.}$$

- Ist $t = p/(2^k - 1)$, $1 \leq p \leq 2^k - 1$, so ist w_t ein Fixpunkt der Periode k von $B(w) = w^2$. Die im Beweis von Satz 2.12. durch w_t definierte Abbildung $b_1 b_2 \dots b_k$ können wir dann so schreiben

$$b_1 \dots b_k(re^{2\pi i s}) = r^{1/2^k} e^{2\pi i \bar{s}}$$

mit

$$\bar{s} = (s + p)/2^k.$$

$b_1 \dots b_k$ bildet D' auf den Sektor

$$\{w = re^{2\pi i s} \mid r \in (0, 1), p/2^k \leq s \leq (p+1)/2^k\} \text{ ab. Der Radius}$$

$$\{rw_t \mid r \in (0, 1)\} \text{ ist invariant.}$$

- Ist t irrational, so ist die Frage nach der Existenz radialer Grenzwerte von ϕ wesentlich schwieriger zu beantworten. Nach einem Satz von Fatou /32, S.41/ existieren radiale Grenzwerte zwar für fast all $t \in (0, 1)$, es ist aber völlig unklar wodurch die Werte von t in unserem Fall bestimmt sind.
- Ganz offensichtlich läßt sich der obige Beweis auch für den Fall $B(w) = w^n$ durchführen.

Ist R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu $B_R(w)=w^2$, so führen wir folgende Sprechweise ein./9/ :

$z \in \partial A^*(\alpha)$ läßt den Winkel t zu, wenn

$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(re^{2\pi i t}) = z$ gilt.

2.13. Lemma

Es sei R auf $A^*(\alpha)$ via ϕ zu $B_R(w)=w^2$ konjugiert. Dann läßt

$z_0 = \lim_{x \rightarrow 1} \phi(r)$ nur den Winkel Null zu.

Beweis

Wir zeigen $z_0 \neq z_{1/2} = \lim_{x \rightarrow 1} \phi(re^{\pi i t})$.

Dann folgt die Behauptung aus /11, S.60/.

Annahme: $z_0 = z_{1/2}$

Es ist $|R'(z_0)| \geq 1$, andernfalls wäre z_0 ein attraktiver Fixpunkt von R und somit kein Element von $A^*(\alpha)$. Damit ist R auf einer Umgebung von z_0 injektiv. Es gilt für alle $r \in]0,1[$

$\phi(r) = R(\phi(\sqrt{r})) = R(\phi(-\sqrt{r}))$ und $\phi(\sqrt{r}) \neq \phi(-\sqrt{r})$.

Nach der Annahme ist

$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} \phi(-\sqrt{x})$.

Also ist R auf keiner Umgebung von z_0 injektiv-
Widerspruch.

ged.

Bemerkungen

- Es ist entweder $|R'(z_0)| > 1$ oder $R'(z_0) = 1$, /30, Prop.3/.
- Ist $B_R(w) = w^n$, so ist die Aussage des Lemmas 2.13. im allgemeinen nicht richtig.

So ist $p(z) = 3z/2 + z^3$ auf $A(\infty)$ zu $B(w) = w^3$ konjugiert, aber der repulsive Fixpunkt $z=0$ läßt die Winkel β und $1/2$ zu $/11, S.61/$.

Wir wollen uns nun erneut mit sofortigen Attraktionsgebieten beschäftigen, deren Rand lokal zusammenhängend ist. Nach dem Satz 2.11. existiert eine stetige Abbildung $g: S^1 \rightarrow \partial A^*(\alpha)$, die eine Beschreibung der Dynamik erlaubt. Leider ist g nicht notwendig injektiv. Unser Ziel ist es, ein Kriterium für die Injektivität von g zu entwickeln. Und zwar für den Fall, daß R auf $A^*(\alpha)$ zu einer Blaschke-Funktion vom Grad 2 konjugiert ist.

Dazu benötigen wir einige Vorüberlegungen.

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und offen, so existiert eine Zerlegung von $\Sigma - \partial G$ in Zusammenhangskomponenten G, G_j , $j \in I$, dabei ist I eine höchstens abzählbare Indexmenge, die auch leer sein kann. Wir fragen nun, wann ∂G eine Jordankurve ist. Aus dem Jordanschen Kurvensatz erhalten wir sofort die notwendige Bedingung $I \neq \emptyset$.

Im folgendem Theorem geben wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an. Überraschenderweise kann diese zunächst rein topologisch erscheinende Frage durch weitere Überlegungen über die Iterierten der Abbildung $w \rightarrow w^2$ auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $\overline{D}$ beantwortet werden.

2.14. Theorem

Es sei $G \subset \Sigma$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, für das $\Sigma - \partial G = G_0 \cup_{j \in I} G_j$ und $I \neq \emptyset$ gilt.

$F: \overline{G} \rightarrow \overline{G}$ und $H: \overline{D} \rightarrow \overline{G}$ seien stetige Abbildungen mit diesen Eigenschaften:

- a) $\# \{F^{-1}(x)\} \leq 2$ für alle $x \in G$,
- b) $H: D \rightarrow G$ ist ein Homöomorphismus,
- c) für alle $w \in \overline{D}$ gilt $F(H(w)) = H(w^2)$.

Dann gilt:

$H: \partial D \rightarrow \partial G$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn der Fixpunkt $H(1) \in \partial G_1$ für ein $1 \in I$.

Vor dem Beweis des Theorems 2.14. wollen wir seine Anwendung auf Ränder von Attraktionsgebieten kennenlernen.

2.15. Satz

Es sei R auf $A^*(\alpha)$ via ϕ konjugiert zu

$$B_R(w) = w \frac{w+u}{1+\overline{w}u}, \quad |u| < 1,$$

und die Zerlegung von $\Sigma - \partial A^*(\alpha)$ erfülle die Voraussetzungen des Theorems 2.14. . Dann gilt :

$\partial A^*(\alpha)$ ist genau dann eine Jordankurve, wenn ϕ eine stetige Fortsetzung auf ∂D besitzt und wenn R auf $\partial A^*(\alpha)$ einen Fixpunkt z_0 mit $z_0 \in \partial G_1$, $1 \in I$, besitzt.

Beweis

a) Es sei $\partial A^*(\alpha)$ eine Jordankurve. Dann besitzt ϕ eine homöomorphe Fortsetzung $\phi: \overline{D} \rightarrow \overline{A^*(\alpha)}$, /23, S.281/. Nach dem Lemma 2.10. existiert ein Homöomorphismus $h: S^1 \rightarrow S^1$ so, daß $B_R(h(w)) = h(w^2)$ für alle $w \in S^1$ gilt.

Damit folgt

$$(\phi h)^{-1} R(\phi h(w)) = w^2.$$

Also hat R auf $\partial A^*(\alpha)$ genau einen Fixpunkt $z_0 = \phi h(1)$, dieser ist Randpunkt von $\Sigma - \overline{A^*(\alpha)}$.

b) Wir wenden das Theorem 2.14. an, indem wir stetige Abbildungen $F: \overline{A^*(\alpha)} \rightarrow \overline{A^*(\alpha)}$ und $H: \overline{D} \rightarrow \overline{A^*(\alpha)}$ mit den geforderten Eigenschaften konstruieren.

Nach dem Lemma 2.10. existiert ein Homöomorphismus $h: S^1 \rightarrow S^1$, sodaß

$$B_R(h(w)) = h(w^2) \text{ für alle } w \in S^1 \text{ gilt.}$$

Aus der Stetigkeit von ϕ auf $\overline{D}$ folgt

$$R(\phi h(w)) = \phi h(w^2) \text{ für alle } w \in S^1. \text{ Damit konstruieren wir } H.$$

Die Abbildung

$$h_\infty: \overline{D} \rightarrow \overline{D} \text{ mit } h_\infty(w) = \begin{cases} |w| h(w/|w|) & w \neq 0 \\ 0 & w = 0 \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus von $\overline{D}$.

Dann setzen wir

$$H: \overline{D} \rightarrow \overline{A^*(\alpha)}, \quad H(w) = \phi h_\infty(w)$$

und

$$F: \overline{A^*(\alpha)} \rightarrow \overline{A^*(\alpha)}, \quad F(z) = \begin{cases} R(z) & z \in \partial A^*(\alpha) \\ H((H^{-1}(z))^2) & z \in A^*(\alpha) \end{cases}$$

Damit sind, bis auf die Stetigkeit von F , die Voraussetzungen des Theorems 2.14. erfüllt. Wir beweisen nun die Stetigkeit von F .

Offenbar ist $F|A^*(\alpha)$ und $F|\partial A^*(\alpha)$ stetig.

Es sei nun $z \in \partial A^*(\alpha)$ und $(z_n) \subset A^*(\alpha)$ eine gegen z konvergente Folge. Die Folge $(H^{-1}(z_n) = w_n)$ hat nur Häufungspunkte in S^1 . Ist $(w_{n(k)})$ eine gegen $w \in \partial D$ konvergente Teilfolge, so haben wir

$$F(z_{n(k)}) = H(w_{n(k)})^2.$$

Durch den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ erhalten wir

$H(w^2) = F(H(w)) = F(z) = R(z)$. Also hat $\{F(z_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nur $R(z)$ als Häufungspunkt. Damit ist F stetig und $\partial A^*(\alpha)$ eine Jordankurve.

qed.

Bemerkungen

- Für den Beweis des Satzes 2.15. war die Konstruktion der Abbildungen H und F von entscheidender Bedeutung. Wir haben somit folgendes Problem vor uns:
 $G \subset \mathbb{E}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Wann gibt es stetige Abbildungen H und F , die den Voraussetzungen des Theorems 2.14. genügen?
- Ist $G = A^*(\alpha)$ und R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu einer Blaschke-Funktion vom Grad zwei und ist $\partial A^*(\alpha)$ lokal zusammenhängend, so zeigt uns der obige Beweis die Existenz der Abbildungen F und H . Und zwar auch dann, wenn ∂G keine Jordankurve ist.

- $a \in \partial G$ heißt Schnittpunkt, wenn $\partial G - \{a\}$ nicht zusammenhängend ist. Ist die Anzahl der Schnittpunkte von ∂G endlich und ungleich Null, so gibt es keine Abbildungen H und F .

Wir kommen nun zum

Beweis von Theorem 2.14.

1) Notwendigkeit

Ist $H: \partial D \rightarrow \partial G$ ein Homöomorphismus, so ist $H(\partial D)$ eine Jordankurve. Damit ist $\Sigma - \partial G = G \cup (\Sigma - \bar{G})$ und $H(1) \in \partial(\Sigma - \bar{G})$.

2) Das Kriterium ist hinreichend

Wir unterteilen den Beweis in mehrere Hilfssätze, mit diesen Hilfssätzen erhalten wir:

Ist $H: \partial D \rightarrow \partial G$ nicht injektiv, so hat F entweder einen weiteren Fixpunkt ungleich $H(1)$ auf ∂G oder $H(1) \notin \partial G_1$ für alle $l \in I$.

Die Existenz eines weiteren Fixpunktes von F in ∂G widerspricht ebenfalls der Bedingung $H(1) \in \partial G_1$ für ein $l \in I$.

Zuvor benötigen wir einige Vorbereitungen.

a) Symbolische Dynamik /20,28/

$\mathcal{F} := \{A = (a_j) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gibt es } j \geq k \text{ mit } a_j = 0\}$
sei der Raum der zulässigen Folgen.

Die Abbildung

$$\sigma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, A = (a_1, a_2, \dots) \rightarrow \sigma A = (a_2, \dots)$$

heißt Shift-Abbildung.

Jedem $w \in S^1$ entspricht genau ein $A = (a_j) \in \mathcal{F}$ und umgekehrt.

Denn die Abbildung

$$T: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow S^1, A \rightarrow e^{2\pi i t} \text{ mit } t = t(A) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j / 2^j$$

ist bijektiv. Weiter gilt für $A \in \tilde{\mathcal{F}}$;

$$T(\sigma A) = (T(A))^2.$$

Die Abbildung $w \rightarrow w^2$ auf S^1 ist also konjugiert zur Shift-Abbildung. Auf $\tilde{\mathcal{F}}$ haben wir durch $A \leq B$ genau dann, wenn $t(A) \leq t(B)$ eine Ordnung gegeben. In diesem Sinne sprechen wir von Intervallen etc. in $\tilde{\mathcal{F}}$.

b) Notation

Ist $A = (a_1, a_2, \dots) \in \tilde{\mathcal{F}}$, so sind

$0A = (0, a_1, \dots)$ und $1A = (1, a_1, \dots)$ die Urbilder von A bezüglich der Shift-Abbildung. Ist $T(A) = w$, so notieren wir dies

w_A . w_t bedeutet weiterhin $w_t = e^{2\pi i t}$. Wir sagen:

$A, B \in \tilde{\mathcal{F}}$ werden identifiziert, wenn $H(w_A) = H(w_B)$.

$z \in \mathcal{G}$ läßt den Winkel $t \in (0, 1[$ zu, wenn $H(w_t) = z$.

Wir beginnen nun mit der Formulierung der Hilfssätze (HS).

HS 1.

$H(1) = H(w_0)$ läßt nur den Winkel Null zu.

Beweis

Zunächst zeigen wir $H(w_0) \neq H(w_{1/2})$; dazu machen wir die Annahme $H(w_0) = H(w_{1/2})$.

Dann ist $F^{-1}(H(w_0)) = \{H(w_0), H(w_{1/2})\} = \{H(w_0)\}$

und somit

$F^{-n}(H(w_0)) = \{H(w_t) \mid t = p/2^n, p \text{ ungerade}\}.$

Also ist $H(w_t) = H(w_0)$ für alle $t = p/2^n, p$ ungerade, $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Stetigkeit von H folgt $H(S^1) = \{H(w_0)\}$. Dies widerspricht der Voraussetzung an die Zerlegung von $\Sigma - \lambda G$.

Damit sind $H(w_0)$ und $H(w_{1/2})$ verschieden. Die übrige Aussage ergibt sich aus dem gleichen topologischen Schluß wie in /11, S.60/.

ged.

Von nun an seien $A, B \in \mathcal{F}$ ungleich der Nullfolge $(0, 0, \dots)$ und $A < B$.

HS 2.

Werden A und B identifiziert und gilt $\sigma A = B$, so ist $H(w_B) = H(w_A)$ ein weiterer Fixpunkt von F .

Beweis

Es gilt

$$F(H(w_B)) = F(H(w_A)) = H(w_{\sigma A}) = H(w_B).$$

Also ist $H(w_B) \neq H(1)$ ein weiterer Fixpunkt von F .

ged.

Die Menge

$U(A, B) = \{0A, 1A, 0B, 1B\}$ ist die Menge der Urbilder von A und B bezüglich σ . Werden A und B identifiziert, so müssen je zwei Elemente von $U(A, B)$ identifiziert werden (vgl.: Voraussetzung a)).

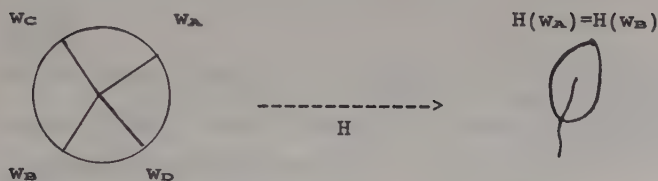
HS 3.

Werden A und B identifiziert und ist $U(A, B) \cap (A, B) = \{C\}$, so hat F den weiteren Fixpunkt $H(w_A)$.

Beweis

C muß mit einem weiteren $D \in U(A, B)$, welches nicht im Inter-

vall (A,B) liegt, identifiziert werden. Wir haben folgende Situation vor uns



Da $H:D \rightarrow G$ ein Homöomorphismus ist, haben die Bilder der Radien rw_A, rw_B, rw_C, rw_D , $r \in (0,1)$ (nur den Punkt $H(0)$ gemeinsam. Aus der Stetigkeit von $H:D \rightarrow G$ und $H(w_A) = H(w_B)$ folgt $H(w_A) = H(w_B) = H(w_C) = H(w_D)$.

Da $CEU(A,B)$ gilt entweder $\sigma C = A$ oder $\sigma C = B$. In jedem Fall erhalten wir nach HS 1. einen weiteren Fixpunkt. qed.

HS 4.

Werden A und B identifiziert und gilt

$$U(A,B) \cap (A,B) = \{1A, 0B\},$$

so werden $0A$ und $1B$ identifiziert oder $H(w_A)$ ist ein weiterer Fixpunkt.

Beweis

Wird $0A$ mit $1A$ oder $0B$ identifiziert, so folgt mit dem Schluß aus HS 3., $H(w_A)$ ist ein weiterer Fixpunkt. Analoges gilt für alle übrigen Identifizierungen außer für die von $0A$ mit $1B$.

qed.

HS 5.

Gilt $A \neq B$ und $\sigma A = \sigma B = C$, so ist $U(A, B) \cap (A, B) = \{1A, 0B\}$.

Beweis

Wir haben $A = 0C$ und $B = 1C$, also

$$A < 1A = 10C < 11C = 1B \quad \text{und}$$

$$A = 0C < 01C = 0B < 1C .$$

qed.

HS 6.

A und B werden identifiziert, und es gilt

- $\sigma^n A \neq \sigma^n B$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

- $U(A, B) \cap (A, B) = \emptyset$.

Setzen wir $A_k = \min\{\sigma^k A, \sigma^k B\}$ und $B_k = \max\{\sigma^k A, \sigma^k B\}$, so gilt:

Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß $U(A_k, B_k) \cap (A_k, B_k) \neq \emptyset$ ist, oder

F hat einen weiteren Fixpunkt.

Beweis

Annahme: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $U(A_n, B_n) \cap (A_n, B_n) = \emptyset$.

Dies ist äquivalent zu

(1) $1A_n > B_n$ und $0B_n < A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ohne Einschränkung sei

$$A = (0, a_2, \dots)$$

$$B = (1, b_2, \dots).$$

Dann erhalten wir aus (1) $b_2 = 0$ und $a_2 = 1$. Durch Anwenden dieses Schlusses auf σA und σB , folgt $a_3 = 0$ und $b_3 = 0$. Also

$$A = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

$$B = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) .$$

Damit ist $\sigma A = B$ und F hat einen weiteren Fixpunkt (HS 2.).
qed.

Wir betrachten nun den Fall eines weiteren Fixpunktes von F auf ∂G .

HS 7.

Es sei $x \in \partial G$, $x \neq H(1)$, ein Fixpunkt von F . Dann gibt es $A_0, B_0 \in \mathcal{F}$ mit $H(w_{A_0}) = H(w_{B_0}) = x$ und $0_n A_0$ und $1_n B_0$ werden für alle $n \in \mathbb{N}$ identifiziert.

Beweis

Es sei $A \in \mathcal{F}$, sodaß $H(w_A) = x$ gilt. Da x ein Fixpunkt von F ist, folgt, daß entweder $H(w_{0A}) = x$ oder $H(w_{1A}) = x$ gilt.

Wir setzen

$$A_0 = \inf\{A \mid H(w_A) = x\} \quad \text{und}$$

$$B_0 = \sup\{A \mid H(w_A) = x\}.$$

Da H stetig ist, gilt $H(w_{A_0}) = H(w_{B_0}) = x$.

Da $0A_0 < A_0$ wird $0A_0$ nicht mit A_0 identifiziert. Also wird $1A_0$ mit A_0 identifiziert, und somit $1A_0 \leq B_0$. Analog verläuft die Argumentation für $0B_0$ und $1B_0$. Damit werden $0_n A_0$ und $1_n B_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ identifiziert.

qed.

In den Hilfssätzen 1 bis 7 haben wir alle möglichen Fälle für die Lage der Urbilder von A und B untersucht. Zunächst ist A nicht die Nullfolge (HS 1.). Erfüllen A und B die Voraussetzungen von HS 4. bzw. HS 5., so werden $0_k A$ und $1_k B$ für alle $k \in \mathbb{N}$ identifiziert. Ist dies nicht der Fall, so hat F nach den Hilfssätzen 2, 3 und 6 einen weiteren Fixpunkt x . Nach HS 7. folgt somit die Existenz zweier Folgen $A, B \in \mathcal{F}$ mit $H(w_A) = H(w_B) = x$, für die $0_k A$ und $1_k B$ für alle $k \in \mathbb{N}$ identifi-

ziert werden.

Ist $H(w_c)$ bereits ein Fixpunkt von F , so garantiert uns der HS 7. erneut zwei Punkte A, B mit obigen Eigenschaften.

Seien also A und B zwei Punkte der obigen Art.

Setzen wir

$$t_n = t(A)/2^n \text{ und } s_n = (t(B) + 2^n - 1)/2^n,$$

so gilt :

$H(w_{t_n}) = H(w_{s_n})$. Aus der Stetigkeit von H folgt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(w_{t_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(w_{s_n}) = H(1).$$

Wir zeigen, daß dieser Sachverhalt der Voraussetzung

$H(1) \in \partial G_j$ für ein $j \in I$ widerspricht.

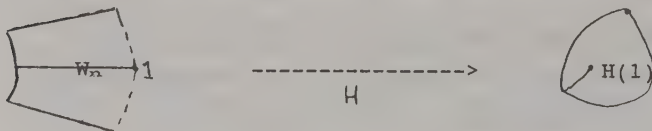
Es sei $z_0 \in G_j$ und $\delta = d(z_0, H((0, 1)))$. Da H gleichmäßig stetig auf $\bar{D}$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq n_0$ und für alle

$$z \in W_n = \{z = re^{2\pi i t} \mid 1 - n^{-1} \leq r \leq 1, 0 \leq t < t_n \text{ oder } s_n < t \leq 1\}$$

$$|H(z) - H(1)| < \delta/4 \text{ gilt.}$$

Dann ist

$H(\partial W_n) = \{z = e^{2\pi i t} \mid 0 \leq t < t_n \text{ oder } s_n < t \leq 1\}$ eine Jordankurve, θ , die bis auf den Punkt $H(w_{t_n})$ ganz in G enthalten ist.



$H(1)$ liegt in der beschränkten Zusammenhangskomponente, Γ , von $\Sigma - \theta$.

Da $d(z_0, H(1)) = \delta$ ist, liegt z_0 nicht in Γ . Andererseits gibt es ein $z \in \Gamma \cap G_j$. Dies widerspricht dem Zusammenhang von G_j .

qed.

Eine Anwendung des Theorems 2.14. respektive des Satzes 2.15. geben wir im dritten Abschnitt dieser Arbeit.

Ist R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu einer Blaschke-Funktion vom Grad k , so scheint ein zu Satz 2.15. ähnliches Ergebnis möglich, wenn man voraussetzt, daß R auf $\partial A^*(\alpha)$ genau $k-1$ Fixpunkte besitzt, die Randpunkte von Komponenten G_j sind. Die Schwierigkeiten dabei sind

a) die mit k wachsende Anzahl der Urbilder zweier identifizierter Winkel

sowie

b) eine Aussage über die Eindeutigkeit der Winkel, die in einem Fixpunkte auf dem Rand von $A^*(\alpha)$ landen, zu machen.

Wie wir sahen, verhelfen uns globale Konjugationen zu einem besseren Verständnis der Dynamik von R auf sofortigen Attraktionsgebieten und manchmal auch auf dem Rand derselben.

Es ist daher von Interesse, notwendige und hinreichende Kriterien dafür zu entwickeln, wann R auf $A^*(\alpha)$ konjugiert zu einer bestimmten Blaschke-Funktion ist. Wir wollen uns jetzt mit dem Fall $B(w) = w^k$ befassen.

Ist p ein normiertes Polynom vom Grad d , so gilt

2.16. Satz

Es sei $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$. Dann ist p auf $A(\infty) = A^*(\infty)$ genau dann zu $w \rightarrow w^d$ konjugiert, wenn kein endlicher kritischer Punkt von p in $A(\infty)$ enthalten ist.

Ein Beweis ist in /11, S.19/ geführt.

Wir beginnen nun mit dem Studium des allgemeinen Falls. Es sei R eine rationale Abbildung, die den superattraktiven Fixpunkt α hat. Durch eine Möbiustransformation läßt sich stets $\alpha=0$ erreichen. Die Potenzreihenentwicklung von R im Nullpunkt sei

$$R(z) = a_d z^d + \dots$$

Durch eine weitere Möbiustransformation erhalten wir

$$R(z) = z^d + r_{d+1} z^{d+1} + \dots$$

Nach dem zusammenfassenden Theorem 2.5. 2) ist R lokal konjugiert zu $w \rightarrow w^d$. Es gibt somit eine lokal konforme Abbildung $\phi(w) = c_1 w + c_2 w^2 + \dots$ so, daß $R(\phi(w)) = \phi(w^d)$ auf einer Umgebung der Null gilt. Die Koeffizienten der Potenzreihe von ϕ lassen sich durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen. So erhalten wir für c_1 die Gleichung

$$c_1^d = c_1$$

Wir wollen stets $c_1=1$ setzen und reden von der lokalen Konjugationsabbildung ϕ .

Die Frage, ob R auf $A^*(0)$ konjugiert zu $B(w) = w^d$ ist, läßt sich durch Aussagen über die Größe des Betrages der Koeffizienten der Potenzreihe von ϕ beantworten.

Dazu benötigen wir einige Begriffe aus der Theorie der schlichten Funktionen, vgl. /12, 22/.

Mit

$S = \{f: D \rightarrow C \mid f(w) = w + a_2 w^2 + \dots, f \text{ holomorph, } f \text{ injektiv}\}$

wird die Klasse der schlichten Abbildungen bezeichnet.

Seit 1916 wurde folgendes Theorem vermutet

2.17. Theorem (Bieberbach-Vermutung)

Ist $f \in S$, so gilt $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Erst kürzlich gelang es deBranges, einen Beweis für diese Vermutung zu finden /4/, vgl. auch /24/. Gerade das Theorem 2.17. verhilft uns zu einer Lösung unseres Problems.

2.18. Theorem

Es sei R eine rationale Abbildung mit

$R(z) = z^d + r_{d+1} z^{d+1} + \dots$, $d \geq 2$ und $\infty \notin A^*(0)$.

$R|_{A^*(0)}$ ist genau dann konjugiert zu $B(w) = w^d$, wenn für die lokale Konjugationsabbildung $\phi(w) = w + c_2 w^2 + \dots$

$|c_j| \leq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis

a) Ist R auf $A^*(0)$ konjugiert zu $B(w) = w^d$, so gibt es eine schlichte Abbildung $\phi: D \rightarrow A^*(0)$ mit $R(\phi(w)) = \tilde{\phi}(w^d)$. Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir

$\tilde{\phi}(w) = w + c_2 w^2 + \dots$, wobei die Koeffizienten von $\tilde{\phi}$ die gleichen wie die der lokalen Konjugationsabbildung sind.

Da $\tilde{\phi} \in S$ ist, folgt die Behauptung aus Theorem 2.17.

b) Der Beweis gliedert sich wie folgt

- $\phi(w)=w+\dots$ ist holomorph auf D

- $\phi(D)=A^*(0)$

- ϕ ist injektiv

Damit ist R auf $A^*(0)$ konjugiert zu $B(w)=w^d$.

Da $|c_j| \leq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, konvergiert die Potenzreihe von ϕ für alle $w \in D$. ϕ ist holomorph auf D . Damit gilt für alle $w \in D$ $R(\phi(w)) = \phi(w^d)$.

Zum Beweis der übrigen Behauptungen betrachten wir die durch

$$g_B: D \rightarrow (-\infty, 0) \quad \text{mit} \quad g_B(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log |B^n(w)| = \log |w|$$

und

$$g_R: A^*(0) \rightarrow (-\infty, 0) \quad \text{mit} \quad g_R(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log |R^n(z)|$$

definierten Hilfsfunktionen, deren Existenz ebenso wie die Stetigkeit leicht zu verifizieren ist.

Insbesondere haben wir $g_R(z) \neq 0$ für $z \in A^*(0)$.

Zwischen g_B und g_R besteht folgende Beziehung

$$g_R(\phi(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log |R^n(\phi(w))| = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log |\phi(w^{d^n})| = g_B(w).$$

Dann folgt $\phi(D) = A^*(0)$ sofort.

Ist $z \in \partial\phi(D) \cap A^*(0)$, so existiert eine Folge $z_k = \phi(w_k)$ mit $\lim z_k = z$. Weiter nehmen wir an, daß die Folge (w_k) gegen ein $w \in D$ konvergiert. Dann gilt

$$0 \neq g_R(z) = \lim g_R(\phi(w_k)) = \lim \log |w_k| = 0.$$

Also $z \in \partial A^*(0)$.

Die Injektivität von ϕ folgt aus

- $\phi^{-1}(0) = 0$

- ϕ ist eigentlich

Annahme: Es gibt $w_1 \in D - \{0\}$ mit $\phi(w_1) = 0$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $0 = R^n(\phi(w_1)) = \phi(w_1^{d^n})$

Also $\phi \equiv 0$, Widerspruch.

Ist (w_k) eine Folge in D mit einem Grenzwert $w \in \partial D$, so haben wir

$$\lim g_R(\phi(w_k)) = \lim \log |w_k| = 0.$$

Damit häufen sich die Punkte der Folge $(\phi(w_k))$ am Rand von $A^*(0) = \phi(D)$, ϕ ist eigentlich.

qed.

Bemerkungen

- Die Abbildungen g_R und g_B sind analog zu der Abbildung G_x in /11/ definiert.
- Es gilt $g_R(R(z)) = dg_R(z)$.
- Ist $f(w) = w + a_2 w^2 + \dots$ eine Potenzreihe mit $|a_j| \leq j$, so folgt im allgemeinen nicht, daß f auf D injektiv ist. Dies zeigt schon das Beispiel $f(w) = w + w^2$ mit $f'(1/2) = 0$.
Erst durch die Gültigkeit der Funktionalgleichung $R(\phi(w)) = \phi(w^d)$ folgt die Injektivität von ϕ .

Die Koeffizienten der lokalen Konjugationsabbildung liefern uns somit wertvolle Informationen über R auf $A^*(0)$. Gilt $|c_j| > j$ für ein $j \in \mathbb{N}$, so kann R auf $A^*(0)$ nicht zu $B(w) = w^d$ konjugiert sein.

Es gilt vielmehr

2.19. Lemma

$R(z)=z^d+\dots$ sei eine rationale Abbildung. Für die lokale Konjugationsabbildung $\phi(w)=w+c_2w^2+\dots$ existiere ein $j \in \mathbb{N}$, sodaß $|c_j| > j$ ist.

Dann besitzt R einen kritischen Punkt in $A^*(0) - \{0\}$.

Beweis

Wir zeigen

- Der Konvergenzradius r der Potenzreihe von ϕ ist kleiner 1.
- $\partial\phi(D_x(0)) \cap A^*(0)$ enthält einen kritischen Punkt ungleich Null.

Annahme: r ist größer gleich 1.

Dann ist ϕ holomorph auf D und für alle $w \in D$ gilt $R(\phi(w)) = \phi(w^d)$

Mit denselben Schlüssen wie im Beweis des Theorems 2.18.

sehen wir $|c_j| \leq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Widerspruch.

Also ist $r < 1$.

Annahme: $\partial\phi(D_x(0))$ enthält keinen kritischen Punkt von R .

Da $\phi: D_x(0) \rightarrow A^*(0)$ konform ist, besitzt R wegen

$$R'(\phi(w))\phi'(w) = dw^{d-1}\phi(w^d)$$

keine kritischen Punkte in $\phi(D_x(0)) - \{0\}$.

Mit R_μ^{-1} bezeichnen wir die Zweige der Umkehrfunktionen von $R|_{\phi(D_x(0))}$. Da $\partial\phi(D_x(0))$ keine kritischen Punkte enthält, ist

$$\partial\phi(D_x(0)) = \bigcup R_\mu^{-1}(\phi(\partial D_x(0))) \quad , s=r^d,$$

eine analytische Jordankurve. Nach /12, S.15/ besitzt ϕ eine konforme Fortsetzung auf einen Kreis mit Radius $r_1 > r$.

Widerspruch.

qed.

Die Konsequenzen des Lemmas 2.19. sind frappierend. Allein aus der Kenntnis der Potenzreihe von R in einem superattraktiven Fixpunkt können wir die Existenz oder Nichtexistenz eines weiteren kritischen Punktes von R in dem sofortigen Attraktionsgebiet nachweisen. Wir haben somit eine Art Lokal-Global Prinzip vor uns.

Als Anwendung wollen wir zwei Korollare angeben. Korollar 2.20. bezieht sich auf ein Teilproblem in /8/ über das Newton-Verfahren für Polynome dritten Grades. Das Korollar 2.21. gibt eine weitere Charakterisierung der Mandelbrotmenge, /10,17/.

2.20. Korollar

Es sei $P_a(z) = z^3 + z(a-1) - a$, $a \in \mathbb{C} - \{-2\}$ und

$$N_a(z) = z - \frac{P_a(z)}{P_a'(z)} = \frac{2z^3 + a}{3z^2 + a - 1}$$

das zu P_a gehörende Newton-Verfahren. Dann gilt:

Ist $|a-7| > 18$, so ist der kritische Punkt $z=0$ von N_a in $A^*(1)$.

Beweis

Da $P_a(1)=0$ ist, ist 1 ein superattraktiver Fixpunkt von N_a .

Durch den Koordinatenwechsel $z=u+1$ geht N_a über in

$$M_a(u) = \frac{u^2(2u+3)}{3u^2+6u+a+2}$$

und wir haben die Potenzreihenentwicklung

$$M_a(u) = \frac{3}{2+a} u^2 + \frac{2(a-7)}{(a+2)^2} u^3 + \dots$$

Durch einen weiteren Koordinatenwechsel erhalten wir

$$M_a(u) = u^2 + \frac{2(a-7)}{9} u^3 + \dots$$

Der Koeffizient c_2 der lokalen Konjugationsabbildung ϕ ist $c_2 = (a-7)/9$. Für $|a-7| > 18$ ist $|c_2| > 2$.

Nach dem Lemma 2.19. enthält $A^*(1)$ einen weiteren kritischen Punkt von N_a . Da N_a nur die Nullstellen von P_a und Null als kritische Punkte hat und die Nullstellen von P_a Fixpunkte von N_a sind, ist $0 \in A^*(1)$.

ged.

Wir wollen nun das Lemma 2.19. für eine Charakterisierung der Mandelbrotmenge benutzen.

Es sei $p_c(z) = z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Menge

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{Die Julia Menge } J_c \text{ von } p_c \text{ ist zusammenhängend}\} = \{c \in \mathbb{C} \mid c \in A(\infty)\}$$

die Mandelbrotmenge.

Aus dem Satz 2.16. folgt

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid p_c|_{A(\infty)} \text{ ist konjugiert zu } B(w) = w^2\}.$$

Führen wir den Koordinatenwechsel $z = u^{-1}$ durch, so erhalten wir

$$R_c(u) = \frac{u^2}{1+cu^2}.$$

2.21 Korollar

Es sei

$$R_c(u) = \frac{u^2}{1+cu^2}, \quad c \in \mathbb{C},$$

und $\phi_c(w) = w + c_2(c)w^2 + \dots$ die lokale Konjugationsabbildung.

Dann gilt

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid |c_j(c)| \leq j \text{ für alle } j \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis

Der Beweis folgt direkt aus dem Theorem 2.18. und dem Lemma 2.19. .

qed.

Weiter haben wir

2.22. Korollar

Es gelten die Voraussetzungen des Korollars 2.21. .

Dann ist ϕ_α ist ungerade.

Beweis

Zur Vereinfachung schreiben wir R, ϕ für R_α und ϕ_α .

Da R gerade ist, gilt $R(\phi(w)) = R(-\phi(w)) = \phi(w^2)$.

Weiter haben wir $R(\phi(-w)) = R(\phi(w)) = \phi(w^2)$.

Da $\phi(w^2)$ bezüglich R nur zwei Urbilder besitzt und $\phi(-w) \neq \phi(w)$ ist, ist $\phi(w) = -\phi(-w)$.

qed.

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir $c_3(c) = c/2$.

Ist $|c| > 6$, so folgt wegen des Lemmas 2.19. die Existenz eines weiteren kritischen Punktes in $A^*(0)$.

Um eine Verschärfung dieses Resultats zu bekommen, benötigen wir das Korollar 2.22. . Nach /12, S.64/ ist ϕ_α genau dann aus S , wenn ein $f_\alpha(w) = w + f_2(c)w^2 + \dots$ ES existiert, sodaß

$\phi_\alpha(w) = \sqrt{f_\alpha(w^2)} = w\sqrt{1 + f_2(c)w^2 + \dots}$ gilt.

Eine einfache Rechnung zeigt

$$f_2(c) = 2c_2(c) = c .$$

Damit haben wir: ist $|c| > 2$, so ist $c \notin M$.

Wie das Beispiel $c = -2$ zeigt, ist diese Ungleichung scharf.

3. Die Familie H_t

In diesem Kapitel wollen wir eine spezielle Familie rationaler Abbildungen vom Grad zwei genauer untersuchen. Wir betrachten

$$H_t(z) = \frac{z^2+t}{z^2-1}, \quad t \in \mathbb{C} - \{-1\}$$

Die Familie ist eng verwandt mit einer Familie rationaler Abbildungen vom Grad vier, nämlich

$$T_q(z) = \left(\frac{z^2+q-1}{2z+q-2} \right)^2, \quad q \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Die Familie T_q kann physikalisch als eine Renormierungsabbildung eines hierarchischen Potts-Modells interpretiert werden, vgl. /21,22,23/.

Bis auf den Satz 3.15., der die in /21/ gestellte Frage nach einem Phasenübergangspunkt beantwortet, wollen wir auf die physikalischen Aspekte der Abbildung nicht weiter eingehen. Unser Ziel ist es vielmehr, eine Anwendung der im zweiten Kapitel dieser Arbeit vorgestellten Resultate zu geben. Zur Vereinfachung der Schreibweise verabreden wir noch, die Indizes t und q dann fortzulassen, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Wir beginnen mit dem Zusammenhang von T und H.

3.1. Lemma

Für $t=q-1$ und $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ gilt

$$h_q^{-1} T_q h_q(z) = H_t^2(z) \quad \text{mit}$$

$$h_q(z) = \frac{z+q-1}{z-1} = \frac{z+t}{z-1}.$$

Beweis

Es ist

$$H^2(z) = \frac{z^4+t}{2z^2+t-1}$$

und

$$h^{-1}(z) = \frac{z+t}{z-1}.$$

Damit erhalten wir nach einer längeren Rechnung

$$h^{-1} T h(z) = \frac{(z^2+t)^2 + t(z^2-1)^2}{(z^2+t)^2 - (z^2-1)^2} = H^2(z).$$

ged.

Aussagen über die Juliamenge $J=J_t$ von H bzw. H^2 gestatten somit Aussagen über die Juliamenge von T.

Neben H betrachten wir zusätzlich die Abbildung H^2 , die wir darum mit $S(z)=H^2(z)$ bezeichnen wollen.

Wichtig für alles folgende ist die Kenntnis der kritischen Punkte von H und S.

Die kritischen Punkte von H sind: 0 und ∞ .

Die von S sind: $0, \infty, 1, -1, \sqrt{-t}, -\sqrt{-t}$.

Da $H(\infty)=1$ und $H(1)=\infty$ ist, ist $\{1, \infty\}$ ein superattraktiver Zykel von H. Damit sind 1 und ∞ superattraktive Fixpunkte von S.

Wegen

$$S(\infty)=\infty, S(-1)=1, S(\sqrt{-t})=S(-\sqrt{-t})=H(0)=-t,$$

ist 0 der einzige wirklich interessante kritische Punkt von S ; dies wird im Verlauf des Kapitels deutlicher.

Mit $A^*(1)=A^*_t(1)$ und $A^*(\infty)=A^*_t(\infty)$ bezeichnen wir wie üblich die sofortigen Attraktionsgebiete der Fixpunkte 1 und ∞ von S . Weiter gilt

$$H(A^*(1))=A^*(\infty) \text{ und } H(A^*(\infty))=A^*(1).$$

Als erstes Resultat über die Juliamenge von H bzw. S haben wir:

3.2. Satz

J ist genau dann eine Jordankurve, wenn $0 \in A^*(1)$.

Beweis

a) Es gelte $0 \in A^*(1)$.

Dann ist $H(0)=-t \in A^*(\infty)$ und $H^2(0)=t/(t-1) \in A^*(1)$.

Wir zeigen: $A^*(1)=A(1)$ und $A^*(\infty)=A(\infty)$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 2.3. .

Da $H^{-1}(1)=\{\infty\}$ ist, ist $H^{-1}(A^*(1))=A^*(\infty)$.

Da $H^{-1}(t)=\{0\}$ $A^*(1)$ ist, gilt $H^{-1}(A^*(\infty))=A^*(1)$.

Also $A^*(1)=A(1)$ und $A^*(\infty)=A(\infty)$.

b) Es sei J eine Jordankurve.

Dann gilt $\Sigma=A^*(1) \cup A^*(\infty) \cup J$.

$A^*(1)$ und $A^*(\infty)$ sind einfach zusammenhängend und vollständig invariant unter S .

Es sei $\theta: (0,1) \rightarrow A^*(1), \tau \rightarrow \theta(\tau)$ ein stetiger Weg mit $\theta(0)=1$ und $\theta(1)=-1$.

Ist $0 \in \{\theta(\tau) \mid \tau \in (0,1)\}$, so sind wir fertig.

Ist $0 \notin \{0\}$, so betrachten wir den geschlossenen Weg

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} \theta(2\tau) & \tau \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\theta(2\tau-1) & \tau \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Da S eine gerade Abbildung ist, ist $\{\sigma\} \subset A^*(1)$.

Dann liegt 0 in einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\Sigma - \{\sigma\}$.

Da $A^*(1)$ einfach zusammenhängt, ist $0 \in A^*(1)$.

qed.

Ist $0 \in A^*(1)$, so haben wir

3.3. Satz

Ist $0 \notin A^*(1)$, so ist S auf $A^*(1)$ konjugiert zu $B(w) = w^2$.

Beweis

Zu zeigen: $A^*(1)$ enthält keine kritischen Punkte von S ungleich eins.

Offenbar ist $\infty \notin A^*(1)$, und $0 \notin A^*(1)$ nach Voraussetzung.

Annahme: $-1 \in A^*(1)$.

Dann gilt $H^{-1}(A^*(1)) = A^*(\infty)$ und, da $-1 \in A^*(1)$ ist,

$H^{-1}(A^*(\infty)) = A^*(1)$.

Damit sind $A^*(1)$ und $A^*(\infty)$ vollständig invariant unter S .

Nach Theorem 2.3. und Satz 3.2. ist $0 \in A^*(1)$. Widerspruch.

Annahme: $\sqrt{-t} \in A^*(1)$ (der Fall $-\sqrt{-t} \in A^*(1)$ ist analog).

Dann ist $H(\sqrt{-t}) = 0$, also $0 \in A^*(\infty)$. Weiter ist $H(0) = -t \in A^*(1)$.

Es sei $\sigma: (0, 1) \rightarrow A^*(1)$ ein stetiger Weg mit $\sigma(0) = 1$ und $\sigma(1) = -t$.

Dann ist $H^{-1}(\{\sigma\}) \subset A^*(\infty)$ eine Jordankurve, die 0 und ∞ enthält. Da H eine gerade Abbildung ist, gilt

$$-H^{-1}(\{\sigma\}) = H^{-1}(\{\sigma\}) .$$

Insbesondere liegen 1 und -1 in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\Sigma-H^{-1}(\{\sigma\})$ und somit auch in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\Sigma-J$.

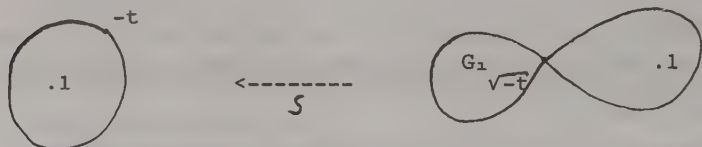
Wegen

$$S(z+1)-1 = z^2 \frac{(z+2)^2}{2(z+1)^2 + t - 1}$$

ist S in einer Umgebung der 1 konjugiert zu $B(w) = w^2$.

Für die lokale Konjugationsfunktion $\phi: D_x(0) \rightarrow A^*(1)$, $r < 1$, gilt:

Es gibt ein $w \in D_x(0)$ mit $\phi(w) = -t$ und $U = \phi(D_{w,1}(0))$ ist einfach zusammenhängend. Das Urbild von U unter $S|U$ hat folgende Gestalt $(S^{-1}(-t)) = \{\sqrt{-t}, -\sqrt{-t}\}$



Da $S^{-1}(1) = \{1, -1\}$ ist, ist $-1 \in G_1$. Damit liegen 1 und -1 in derselben Zusammenhangskomponente von $\Sigma-J$.

qed.

Bemerkung

- Ist $0 \notin A^*(1)$, so enthält $A^*(\infty)$ keinen kritischen Punkt von S ungleich ∞ .

Wegen $S(-1) = 1$, ist $-1 \notin A^*(\infty)$. Nach dem Beweis von Satz 3.3. ist $0 \notin A^*(\infty)$. Ist $\pm \sqrt{-t} \in A^*(\infty)$, so ist $0 \in A^*(1)$ - Widerspruch.

Wegen

$$(S(z^{-1}))^{-1} = z^2 \frac{2+z^2(t-1)}{1+tz^4}$$

ist S auf $A^*(\infty)$ zu $B(w)=w^2$ konjugiert.

Wir sehen: Enthält $A^*(\infty)$ einen weiteren kritischen Punkt von S , so ist $0 \in A^*(1)$.

Als Anwendung des Lemmas 2.19. notieren wir

3.4. Korollar

Ist $|t-1|/8 > 2$, so ist J_t eine Jordankurve.

Beweis

Wir haben

$$R(z) = (S(z^{-1}))^{-1} = 2z^2 + (t-1)z^4 + \dots$$

Durch einen Koordinatenwechsel erhalten wir

$$R(z) = z^2 + z^4(t-1)/8 + \dots$$

Da R gerade ist, ist die lokale Konjugationsabbildung

$$\phi(w) = w + c_2(t)w^2 + \dots \text{ ungerade.}$$

Wir erhalten

$$c_3(t) = (1-t)/16.$$

Mit derselben Überlegung wie im Anschluß des Korollars 2.22. bekommen wir:

Ist $|2c_3(t)| > 2$, so hat S einen weiteren kritischen Punkt in $A^*(\infty)$. Damit ist J eine Jordankurve.

ged.

Für reelle Werte von t werden wir weiter unten optimale Abschätzungen dafür angeben, wann J eine Jordankurve ist.

Dafür benötigen wir einige Korollare über die Lage der Fixpunkte von H und S .

3.5. Korollar

$z_0 \in \Sigma - \{1, \infty\}$ ist genau dann ein Fixpunkt von S , wenn z_0 ein Fixpunkt von H ist.

Beweis

$z_0 \in \Sigma - \{1, \infty\}$ sei ein Fixpunkt von S . Dann gilt

$$0 = (z_0 - 1)(z_0^3 - z_0^2 - z_0 - t). \text{ Da } z_0 \neq 1 \text{ ist gilt}$$

$$0 = z_0^3 - z_0^2 - z_0 - t. \text{ Also ist } z_0 \text{ ein Fixpunkt von } H.$$

Die Umkehrung ist klar.

qed.

Mit der Fixpunktgleichung

$$0 = z_0^3 - z_0^2 - z_0 - t$$

werden wir uns nun eingehender beschäftigen. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \Phi(z) = z^3 - z^2 - z.$$

Ist $t = \Phi(z)$, so ist z ein Fixpunkt von H_t .

3.6. Korollar

Es sei

$$G_0 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 1 \text{ und } |y| < \sqrt{4(x-1) + 3(x-1)^2}\}.$$

Dann ist $\Phi(G_0) = \mathbb{C} - (-\infty, -1)$ und $\Phi|_{G_0}$ ist injektiv.

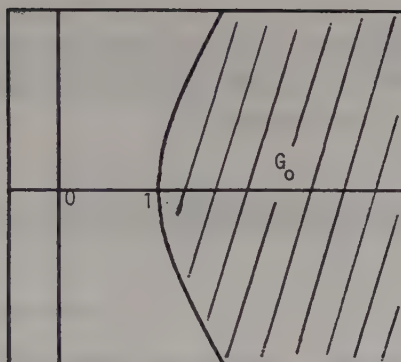
Beweis

Eine elementare Rechnung zeigt, daß $\Phi(\partial G_0) = (-\infty, -1)$ ist.

Da $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ die einzige Nullstelle von Φ in G_0 ist und da Φ auf G_0 eigentlich ist, folgt die Behauptung.

qed.

Das Gebiet G_0 :



3.7. Korollar

Ist $z_0 \in \mathbb{C} - \{1\}$ ein Fixpunkt von H_t , so ist

$$H_t'(z_0) = \frac{-2z_0}{z_0+1}.$$

Beweis

Es gilt $t = z_0^3 - z_0^2 - z_0$ und

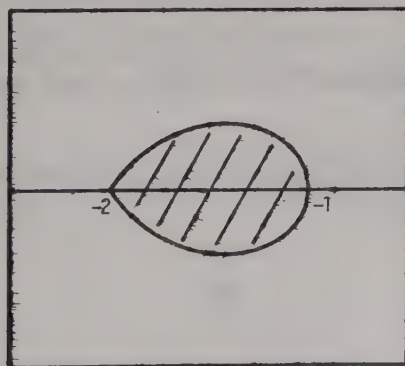
$$H_t'(z_0) = \frac{-2z_0(1+t)}{(z_0^2-1)^2}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir das gewünschte Ergebnis.
ged.

Bemerkung

- Ist $z_0 \in G_0$, so ist z_0 ein repulsiver Fixpunkt von $H_t, t = \Phi(z_0)$.

Das Bild von G_0 unter der Abbildung $-2z/(z+1)$:

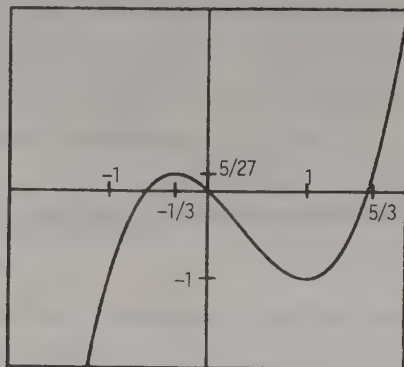


3.8. Korollar

Ist $z_0 \in \partial G_0 - \{1\}$, so hat $H_t, t = \Phi(z_0)$, einen reellen Fixpunkt $z_1 < -1$ und den Fixpunkt $\overline{z_0}$.

Beweis

Wir betrachten den Graphen von Φ für reelle z_0 :



Dann gilt:

$\Phi(z_0) = \Phi(\overline{z_0}) = t < -1$ (Korollar 3.6.) und ein Blick auf den Graph von Φ zeigt, daß stets ein $z_1 < -1$ mit $\Phi(z_1) = t$ existiert.
ged.

Damit bekommen wir

3.9. Korollar

Ist t reell und $t < -1$, so ist $0 \in A^*(1)$. J_t ist eine Jordankurve.

Beweis

Es ist $S(0) = t/(t-1)$ und $0 < S(0) < 1$.

Da für $z \in (0, 1)$

$$S'(z) = \frac{4z(z^2-1)(z^2+t)}{(2z^2+t-1)^2} \geq 0$$

gilt, und da S wegen des Korollars 3.8. keine Fixpunkte im Intervall $(0,1[$ besitzt, ist $0 \in A^*(1)$.

qed.

3.10. Korollar

Ist $z_0 \in]1, 5/3[$, so hat $H_t, t = \Phi(z_0)$, zwei reelle Fixpunkte z_1, z_2 .

Es gilt

$z_1 \in]-1/3, 1[$ ist attraktiv,

$z_2 \in]-1, -1/3[$ ist repulsiv.

Ist $z_0 = 5/3$, so hat $H_t, t = \Phi(5/3) = 5/27$, nur den rational indifferenten Fixpunkt $-1/3$.

Beweis

Die Aussage über die Lage der Fixpunkte folgt sofort aus dem Graphen von Φ (Korollar 3.8.). Nach Korollar 3.7. ist

$|H_t'(z_1)| < 1$, falls $z_1 \in]-1/3, 1[$ ist.

Der Fall $z_0 = 5/3$ ist auch klar.

qed.

3.11. Korollar

Ist $z_0 \in]5/3, \infty[$, so hat $H_t, t = \Phi(z_0)$, die repulsiven Fixpunkte

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 - z_0 + i\sqrt{3z_0^2 - 2z_0 - 5})$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(1 - z_0 - i\sqrt{3z_0^2 - 2z_0 - 5}).$$

Beweis

Es gilt mit $t = z_0^3 - z_0^2 - z_0$

$$z^3 - z^2 - z - t = (z - z_0)(z^2 + z(z_0 - 1) + z_0^2 - z_0 - 1).$$

Damit ergeben sich z_1 und z_2 wie behauptet.

qed.

Mit Hilfe des Korollars 3.11. folgern wir

3.12. Lemma

Ist $z_0 \in]2, \infty[$, so ist $J_t, t = \Phi(z_0)$, eine Jordankurve.

Beweis

Es ist $\Phi(z_0) = t > 2$, also $S(0) = t/(t-1) > 1$.

Weiter ist wegen $0 < z_0^3(z_0 - 2)$

$$S(0) = \frac{z_0^3 - z_0^2 - z_0}{z_0^3 - z_0^2 - z_0 - 1} < z_0.$$

Für $z \in (0, 1)$ ist $S'(z) \leq 0$ und für $z \in (1, z_0)$ ist $S'(z) \geq 0$.

Nach dem Korollar 3.11. hat S im Intervall $(0, z_0)$ nur den attraktiven Fixpunkt 1. Damit ist $0 \in A^*(1)$. Nach dem Satz 3.2.

ist J eine Jordankurve.

ged.

Bemerkung

- Für $z_0 = 2$ ist $\Phi(z_0) = 2$. Da $S(0) = 2$ ist, ist $0 \notin A^*(1)$. J_2 ist somit keine Jordankurve.

Wir beginnen nun mit der Betrachtung von nicht reellen Werten von z_0 . Dabei ist folgende Beobachtung von Nutzen:

Es gilt: $H_t(\bar{z}) = \overline{H_t(z)}$ und $\bar{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z})$ für alle t und z .

Damit genügt es, Werte von Φ mit $\text{Im}(t) > 0$ oder Werte von z mit $\text{Im}(z) > 0$ zu betrachten.

Wir setzen

$$G^+ = \{z \in G_0 \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Für die Fixpunkte gilt dann

3.13. Korollar

Ist $z \in G^+$, so sind die weiteren Fixpunkte von $H_t, t = \Phi(z_0)$, gegeben durch

$$z_1 = \mu_1(z_0) = \frac{1}{2}(1 - z_0 + \sqrt{-3z_0^2 - 2z_0 + 5})$$

$$z_2 = \mu_2(z_0) = \frac{1}{2}(1 - z_0 + \sqrt{-3z_0^2 + 2z_0 + 5}).$$

μ_1 und μ_2 sind auf G^+ holomorph.

Beweis

Gleiche Rechnung wie beim Beweis des Korollars 3.11. .

Da $-3z^2 + 2z + 5 = (-3z + 5)(z + 1)$ gilt, sind μ_1 und μ_2 holomorph auf G^+ .

ged.

Wir wollen nun eine Anwendung des Satzes 2.15. beziehungsweise des Theorems 2.14. kennenlernen.

3.14. Satz

Es sei $0 \notin A^*(1)$ und $\partial A^*(1)$ lokal zusammenhängend.

Dann ist $\partial A^*(1)$ eine Jordankurve.

Beweis

Nach dem Satz 3.3. ist S auf $A^*(1)$ konjugiert zu $B(w) = w^2$.

Da $\partial A^*(1)$ lokal zusammenhängend ist, besitzt die Konjugationsabbildung $\phi: D \rightarrow A^*(1)$ eine stetige Fortsetzung

$\phi: \overline{D} \rightarrow \overline{A^*(1)}$ (Theorem 2.6.).

Damit hat S auf $\partial A^*(1)$ den Fixpunkt $\phi(1)$. Da $\phi(1)$ nach dem

Korollar 3.5. zugleich ein Fixpunkt von H ist und da

$H(A^*(1)) = H(A^*(\infty))$ ist, ist $\phi(1)$ ein Randpunkt von $A^*(\infty)$.

Also sind die Voraussetzungen des Satzes 2.15. erfüllt.

$\partial A^*(1)$ ist eine Jordankurve.

ged.

Bemerkung

- Ist $\partial A^*(1)$ eine Jordankurve, so auch $\partial A^*(\infty)$.

Wir beantworten nun noch die in /21/ gestellte Frage nach Phasenübergangspunkten. Diese sind Fixpunkte von S , die sowohl Randpunkte von $A^*(1)$ als auch von $A^*(\infty)$ sind. Anschließend zeigen wir, daß aus der Existenz eines Phasenübergangspunkts der Zusammenhang der Juliamenge von H folgt.

3.15. Satz

Für alle $t \in \mathbb{C} - \{-1\}$ gibt es einen Fixpunkt von S , der Randpunkt von $A^*(1)$ und $A^*(\infty)$ ist.

Beweis

Für $0 \in A^*(1)$ ist $J_t = \partial A^*(1) = \partial A^*(\infty)$ eine Jordankurve (Satz 3.2.). Die Fixpunkte von H sind repulsiv und Randpunkte von $A^*(1)$ und $A^*(\infty)$.

Ist $0 \notin A^*(1)$, so ist S auf $A^*(1)$ konjugiert zu $B(w) = w^2$ (Satz 3.3.). Nach dem Satz 2.12. existiert der Grenzwert der Konjugationsabbildung ϕ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = z_p.$$

z_p ist ein Fixpunkt von S , der Randpunkt von $A^*(1)$ und $A^*(\infty)$ ist.

qed.

Bemerkungen

- Im Falle $0 \in A^*(1)$ ist nach Satz 3.14. z_p einzige Phasenübergangspunkt, wenn $\partial A^*(1)$ lokal zusammenhängend ist.
- Für reelle Werte von t existiert stets ein reeller Phasenübergangspunkt.

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz über den Zusammenhang der Juliamenge.

3.16. Satz

Für alle $t \in \mathbb{C} - \{-1\}$ ist J_t zusammenhängend.

Beweis

Ist $0 \in A^*(1)$, so ist J nach Satz 3.2. eine Jordankurve.

Es sei $0 \notin A^*(1)$.

Dann existiert ein Phasenübergangspunkt z_p (Satz 3.15.).

$A^*(1)$ und $A^*(\infty)$ sind einfach zusammenhängend, und die Menge

$\partial A^*(1) \cup \partial A^*(\infty) \cup \{z_p\}$ ist zusammenhängend /34/.

Diese Beobachtung ist der Schlüssel zum Verständnis des Beweises. Es sei

$P = \{z \in \Sigma \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } H^n(z) = z_p\}$

und $A(\{1, \infty\})$ das Attraktionsgebiet des Zyklus $\{1, \infty\}$.

Dann ist

$$A(\{1, \infty\}) = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} A_J,$$

wobei A_J die Zusammenhangskomponenten von $A(\{1, \infty\})$ sind;

diese sind ebenfalls einfach zusammenhängend. Wir zeigen, daß

$A(\{1, \infty\}) \cup P$ zusammenhängend ist.

Da $P \subset J$ ist und da $\partial A(\{1, \infty\}) = J$ ist, ist J zusammenhängend.

Es sei A_1 eine Zusammenhangskomponente von $A(\{1, \infty\})$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß

$H^n(A_1) = A^*(\infty)$ und $H^l(A_1) \neq A^*(\infty)$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, gilt.

Somit gibt es ein $z_1 \in \partial A_1 \cup P$ mit

$H^n(z_1) = z_p$ und $H^l(z_1) \neq z_p$ für $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Damit ist z_1 Randpunkt einer weiteren Zusammenhangskomponente A_2 von $A(\{1, \infty\})$ mit

$H^n(A_2) = A^*(1)$. Daher ist $H^{n-1}(A_2) = A^*(\infty)$.

A_2 hat somit einen Randpunkt $z_2 \neq z_1$ mit $H^{n-1}(z_2) = z_p$.

Durch endlich viele Wiederholungen dieser Schlußweise erhalten wir $A_k = A^*(\infty)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Also ist $A(\{1, \infty\}) \cup P$ zusammenhängend.

Wir zeigen nun noch, wie daraus der Zusammenhang der Julia-menge J folgt.

Annahme: $J = J_1 \cup J_2$ und $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

Dann gibt es disjunkte offene Umgebungen V_1, V_2 mit $J_1 \subset V_1$ und $J_2 \subset V_2$.

In V_1 gibt es ein z_1 mit $H^n(z_1) = z_p$ und in V_2 ein z_2 mit $H^k(z_2) = z_p$.

Nach obigem existiert eine Kette von Zusammenhangskomponenten von $A(\{1, \infty\})$, die z_1 mit z_2 verbindet. Für die Kette (A_j) .

$j=1, \dots, m$, gilt

$J \supset \bigcup_{j=1}^m A_j$ und $\bigcup_{j=1}^m A_j$ ist zusammenhängend.

Dies widerspricht der Wahl von V_1 und V_2 .

qed.

Bemerkung

- Aus dem Zusammenhang von J folgt, daß H keine Herman-ringe /35,30/ besitzt.

Literatur

- / 1/ Ahlfors, L.V., "Complex analysis", McGraw Hill, New York, 1966
- / 2/ Brolin, H., "Invariant sets under iteration of rational functions", Arkiv för Matematik 6, 1967, 103-144
- / 3/ Blanchard, P., "Complex analytic dynamics on the Riemann sphere", BAMS, Vol. 11, number 1, July 1984, 85-141
- / 4/ deBranges, L., "A proof of the Bieberbach conjecture", Acta Mathematica 154:1-2, 1985, 137-152
- / 5/ Boettcher, Bulletin of the Kasan Math. Society, Vol 14, 1905
- / 6/ Camacho, C., "On the local structure of conformal mappings and holomorphic vectorfields in C^2 ", Société de Mathématique de France, Astérisque 59-60, 1978, 83-93
- / 7/ Cremer, H., "Über die Häufigkeit der Nichtzentren", Math. Ann. 115, 1938, 573-580
- / 8/ Curry, J.; Garnett, L. und Sullivan, D., "On the iteration of rational functions: Computereperiments with Newton's method" Commun. Math. Phys. 91, 1983, 267-277
- / 9/ Douady, A., "Systèmes dynamiques holomorphes", Séminaire Bourbaki 1982/83, No. 599
- / 10/ Douady, A. und Hubbard, J.H., "Itération des polynômes quadratiques complexes", CRAS t. 294, 1982, 123-126
- / 11/ Douady, A. und Hubbard, J.H., "Etude dynamiques des polynômes complexes", Publications Mathématiques d'Orsay 84-02
- / 12/ Duren, P.L., "Univalent functions", Springer Verlag, New York, 1983
- / 13/ Fatou, P., "Sur les équations fonctionnelles", Bull. Soc. Math. France 47, 1919, 61-271, Bull. Soc. Math. France 48, 1920, 33-94 und 208-314
- / 14/ Herman, M.R., "Are the critical points on the boundaries of singular domains", Institut Mittag-Leffler, Report Nr. 14, 1984
- / 15/ Hille, E., "Analytic function theory", Vol. II, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1962
- / 16/ Julia, G., "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles", J. de Math. pures et appliquées, Sér. (1), 1918, 47-245
- / 17/ Mandelbrot, B., "Fractal aspects of iteration of $z \rightarrow z(1-z)$ for complex and z ", Ann. N.Y. Acad. Sci. 375, 1980, 249-259

- /18/ Mané,R.;Sad,P. und Sullivan,D., "On the dynamics of rational maps", Ann.scient.Ec.Norm.sup.16,1983,193-217
- /19/ Peitgen,H.-O.;Saupe,D. und v.Haeseler,F., "Cayley's problem and Julia sets", Math.Intell.Vol.6,nr.2,1984,11-20
- /20/ Peitgen,H.-O.;Saupe,D. und v.Haeseler,F., "Newton's method and Julia sets", GMD-Studien Nr.97 in: Dynamische Eigenschaften nichtlinearer Differenzengleichungen, Hrsg.: Gabisch.G. und v.Trotha,H., Bonn,1985
- /21/ Peitgen,H.-O.;Prüfer,M. und Richter,P., "Phase transitions and Julia sets", Report Nr.118, FS 'Dynamische Systeme', Universität Bremen,1984
- /22/ Peitgen,H.-O. und Richter,P., "The Mandelbrot set in a model for phase transitions"; Lecture Notes in Mathematics 1111, Springer Verlag, Berlin.111-134
- /23/ Pommerenke,C., "Univalent functions", Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen,1975
- /24/ Pommerenke,C., "The Bieberbach conjecture", Math.Intell.Vol.7, No.2,1985,23-25
- /25/ Ritt,J.F., "On the iteration of rational functions", Trans. of the AMS, Vol.21,1920,348-356
- /26/ Rüssmann,H., "Kleine Nenner II. Bemerkungen zur Newtonschen Methode", Nachr.Akad.Wiss.Göttingen, Math.Phys.Kl., 1972, 296-322
- /27/ Schröder,E., "Über iterierte Funktionen", Math.Ann.3,1871,296-322
- /28/ Shub,M., "Stabilité globale des systèmes dynamiques", Soc.Math. France, Astérisque 56,1978
- /29/ Siegel,C.L., "Iteration of analytic functions", Ann.of Math.43, 1942,607-612
- /30/ Sullivan,D., "Quasi conformal homeomorphisms and dynamics I;II,III", preprint IHES,1983
- /31/ Ushiki,S.;Peitgen,H.-O. und v.Haeseler,F., "Hyperbolic components of rational functions $(z+1/z)$ ", to appear in: Proc. of the meeting on 'The theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems', ed.: Kawakami.H.
- /32/ Priwalow,I.I., "Randeigenschaften analytischer Funktionen" VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,1957
- /33/ Derrida,B.;De Seze,L. und Itzykson,C., Statist.Phys.33,1983,559ff
- /34/ Newman,M., "Elements of the topology of plane sets", Cambridge Univ.Press,1939

Dankadresse

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Forschungsschwerpunktes 'Dynamische Systeme' an der Universität Bremen.

Mein Dank geht an die Professoren H.-O. Peitgen und H.F.Münzner, die durch kritische Bemerkungen und stete Diskussionsbereitschaft wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Dank gebührt aber auch den Herren H.Kriete und Dr.M.Hortmann, die in häufigen Gesprächen halfen, dunkle Punkte zu erhellen.

